



I S E M P R E V E R D E

ACCA GIOVANNI V

— ★ ★ ★ —

Origini della scienza

ATHENA  
EDIZIONI

Athena Edizioni ti regala questo libro in formato cartaceo, stampato e spedito gratuitamente a casa tua. Infatti per ogni libro acquistato dal sito potrai scegliere un libro della collana Sempreverde in omaggio. Visita [edizioniathena.it](http://edizioniathena.it) per maggiori informazioni.

## I

### **Perchè non si è sviluppata la scienza in Cina**

*Conferenza tenuta mercoledì 25 aprile 1945 al Centro di Sintesi Scientifica, in Roma*

Desidero al principio di questo discorso rendere omaggio alla memoria di Ting Wen-chiang, nato nel 1887, morto tragicamente nel gennaio 1936, forse il migliore e il più nobile di quel migliaio di Cinesi che conobbi e di cui conservo grata memoria, nei due anni passati in Cina, nel 1907-1908.

Ebbi l'occasione di compiere con lui, durante un mese, il mio viaggio di ritorno dalla Cina. Egli era allora poco più che ventenne. Dopo aver studiato scienze geologiche in Europa, divenne professore all'Università di Pechino, direttore dell'Ufficio Geologico della Cina e segretario dell'Accademia delle Scienze di Pechino.

Il mio viaggio in Cina era stato in origine progettato da me in seguito ai primi studi di cinese, desideroso di vedere fino a che punto fosse esistita nella Cina antica una scienza di cui parlavano in modo confuso studiosi e missionari d'Europa. Il risultato fu negativo; gli antichi Cinesi non avevano mai posseduto una

scienza molto sviluppata, nè questa riuscì mai a svilupparsi in Cina se non a contatto con l'Europa nel secolo XX. Ma ebbi però un compenso assai maggiore, di più ampia portata. Mi persuasi cioè che il popolo cinese, che conta ancor oggi più di trecento milioni di abitanti, non è un popolo antiquato, conservatore, misoneista, xenofobo, ma è invece dotato di un'attività più recente della nostra, pieno di vita e di fervore, desideroso di apprendere e di sapere.

Ho espresso queste mie convinzioni in vari scritti, specialmente nel 1915 e nel 1928; desidero ora riassumere il risultato a cui sono pervenuto, insolito e quasi paradossale una trentina d'anni or sono, ma che oggi si impone di fronte allo sviluppo contemporaneo della Cina e dell'Estremo Oriente.

Desidero anzitutto porre una breve premessa di carattere etnologico. Ormai non regge più in nessun modo un'opinione che era corrente verso la fine del secolo XIX, che cioè gli uomini che popolano ed hanno popolato la terra differiscano gli uni dagli altri per la loro intelligenza, che cioè questa, rudimentale e quasi animale nei primordii della vita preistorica, si sarebbe soltanto, con un'evoluzione continua, sviluppata, evoluta ed arricchita. È vero soltanto, ed è ovvio, che il patrimonio delle cognizioni acquistate dagli uomini allorchè essi hanno appreso a trasmetterlo da una generazione all'altra ed a conservarle con l'insegnamento orale e con la scrittura, va crescendo con una certa continuità. Ma il progresso dell'intelligenza sembra essere assai più limitato

e circoscritto di quanto non si creda. La vita intellettuale dei popoli preistorici più antichi non era forse meno complessa di quella delle civiltà successive. Le differenze principali che noi riconosciamo tra i vari popoli dipendono piuttosto dalla possibilità che essi hanno avuto di prendere conoscenza e contatto con i risultati raggiunti da altri popoli e da altre civiltà.

La limitazione al progredire del sapere dipende dal diverso grado di attitudini, assai varie nelle varie direzioni dello spirito umano, nelle diverse razze umane; dalla capacità di attenzione, la quale è assai variabile da individuo a individuo, la quale si accresce con l'uso continuo, con l'educazione e soprattutto con la volontà. È questa capacità di attenzione, la quale si sviluppa e si accresce soltanto nei popoli che hanno ideali e mete ben chiare e che si affina e diventa quasi ereditaria se è esercitata nelle generazioni successive, ma che si affievolisce rapidamente e riconduce i popoli alla barbarie se cessa o diminuisce la curiosità o il desiderio di sapere.

Questa osservazione permette di spiegare come in un brevissimo periodo di tempo popolazioni prive di ogni cultura, ritenute barbare, sappiano sorgere, a grandi altezze, come è accaduto ad esempio, per i Macedoni tra i Greci, per i Romani tra i popoli italici, per gli anglosassoni germanici nel nostro medioevo, e in tempi recentissimi, nei successivi sbalzi del popolo giapponese al primo contatto con la civiltà cinese, ed ai nostri giorni con la civiltà europea.

Ma lo sviluppo della scienza procede ininterrotto di generazione in generazione, si trasmette da un popolo all'altro, con una semplicità che soltanto gli storici moderni della scienza riescono a porre in luce. Questo sviluppo non è però uniforme. Durante periodi più o meno lunghi, conservativi, in cui si trasmettono le nozioni apprese, l'opera degli studiosi è in gran parte stazionaria e consiste nell'espore e chiarificare. Questi periodi si alternano con periodi più brevi nei quali gruppi assai ristretti di pochi individui (talvolta uno solo il quale raduna intorno a sè pochi discepoli) creano nuove dottrine, aprono vie nuove e accrescono il sapere o la potenza dell'uomo civile.

Questo modo di vedere, mentre si accorda colle teorie svolte recentemente dal prof. A. C. Blanc, è naturalmente in opposizione con quelle pure svolte con acutezza e diligenza dalla scuola sociologica francese, specialmente nei volumi di L. Levy-Bruhl. Se fosse vero che la logica cinese è una mentalità *prelogica*, se ne dovrebbe trarre la conclusione logica che non potremmo considerarci veramente fratelli, come io penso e credo invece che siamo, con gli uomini di tutto il mondo, ma dovremmo in un modo o nell'altro ritenerci inevitabilmente separati da essi e, presto o tardi, l'orgoglio di razza in forme vecchie o in forme nuove risorgerebbe.

Ne è una prova una lettera malaugurata, fonte d'infiniti guai, scritta da Herbert Spencer il 26 agosto 1892, ad un uomo di

Stato giapponese, il barone Kaneko Kentarò che gli aveva chiesto il suo parere sui matrimoni misti fra Giapponesi ed Europei. Lo spettro del dominio straniero in Giappone, un fato simile a quello che durante qualche secolo (ma forse non per molto tempo ancora) ha subito l'India, sarebbe stata la necessaria conseguenza del contatto con l'Europa.

Isolarsi, star più lontano che fosse possibile dall'Europa, era la via consigliata dal filosofo inglese. Gli storici della seconda guerra mondiale vedranno quale influenza dannosa questa gretta dottrina positivista ha esercitato sull'anima del popolo giapponese e lo ha condotto alla nuova guerra.

Timori analoghi, per quanto infondati, serpeggiano (più confusamente) anche oggi nelle folle degli Stati Uniti d'America. Li credo infondati e devono essere combattuti.

Desidero però essere esatto nell'apprezzare l'opera poderosa del sociologo francese Lévy-Bruhl, m. nel 1939.

Nell'introduzione al suo ultimo volume del 1935, sulla mitologia primitiva, riconosce (p. XI – parlando degli Eschimesi) che «senza dubbio la struttura fondamentale dello spirito umano è dappertutto la stessa: quando i primitivi hanno il sentimento vivo e netto di una contraddizione, essa li urta non meno di noi. La respingono con la stessa energia». In questa affermazione mi sembra si respinga l'opinione che esista presso i popoli primitivi una *mentalità prelogica*.

Il Lévy-Bruhl aggiunge, è vero, un ma: «Ma uno dei caratteri

distintivi della loro mentalità consiste precisamente in questo: spesso ciò che per noi è contraddittorio non sembra loro tale e li lascia indifferenti. Essi sembrano allora adattarsi alla contraddizione ed in questo senso sono prelogici».

È un atteggiamento simile a quello dei Giapponesi: insegnano nelle loro scuole che l'Imperatore discende dalla Dea del Sole scesa sulla terra, vestita di panni che non si sa quando e da chi son stati tessuti... Io credo, d'accordo con i missionari cattolici da S. Francesco Saverio in poi, che i Giapponesi sono capaci di liberarsi da questa orientazione mistica che somiglia al *credo quia absurdum*, ma è l'espressione non di una rinuncia alla logica, ma soltanto del riconoscimento dell'impotenza dell'uomo che cerca un ordine nel mondo, lo intuisce ma sente che gli mancano le parole.

Chi oserebbe accusare Dante, questa mente così acuta e così logica, di mentalità, prelogica, allorché conclude:

*O quanto è corto il dire, e come fioco  
Al mio concetto!*

(Par., XXXIII, 121)

allorché sente l'impotenza di spiegare il mistero della Trinità col quale chiuse il suo canto immortale!

I Cristiani giapponesi che hanno testimoniato col loro sangue la sicurezza della loro fede, hanno anche dimostrato che non è

una insufficienza logica della loro mente che li ha costretti ad accettare un mito assurdo, ma è soltanto un'eredità culturale a cui sanno rinunciare quando sanno sostituirla con una credenza più semplice, limpida e chiara, colla nostra fede.

Ma torniamo al nostro tema.

Se uno domanda perchè un Cinese, per esempio nel secolo XVIII, non ha costruito un aeroplano, non si può rispondere dicendo che si tratta di un individuo appartenente ad una razza inferiore o dotato di cognizioni più rudimentali. E nemmeno si può pensare che abbiano la stessa capacità inventiva un Cinese d'oggi, il quale sia soltanto a conoscenza delle teorie moderne, quali si insegnano e si apprendono nelle scuole superiori e nelle Università ed uno studioso della vecchia Europa. Ancor meno è da credere che le scoperte e le invenzioni scientifiche siano qualche cosa di casuale, che nascono senza ragione apparente, qua e là, nei vari popoli e nelle varie epoche, di guisa che, a confermarne l'origine casuale, si verifichino qua e là, abbastanza frequentemente, scoperte coincidenti e indipendenti.

La storia del pensiero scientifico dimostra invece il contrario, e cioè che ogni scoperta ed ogni nuovo risultato è strettamente concatenato con gli sforzi, continuati attraverso i secoli, di menti umane continuamente tese allo stesso scopo. Così nell'esempio ora citato dell'aeroplano, bisogna anzitutto pensare al desiderio che ebbero gli antichi Greci di volare, imitando gli uccelli. La leggenda di Dedalo inizia con ragione la storia dell'aeronautica.

Porre un problema è un primo passo verso la soluzione. Le ricerche di Aristotele e di Teofrasto sulla vita degli animali sono un secondo passo. I principii della meccanica, intravisti da Aristotele e precisati da Archimede, sono un passo successivo. La costruzione di automi e di macchine destinate a riprodurre vari moti meccanici, descritti da Erone, sono ancora un altro passo. Un progresso ulteriore è compiuto con l'invenzione delle armi da fuoco e delle macchine che utilizzano la forza espansiva del vapore, già note ai Greci. La graduale familiarizzazione con la meccanica delle esplosioni, che avvengono nelle armi da fuoco, ha condotto con una serie quasi ininterrotta di tentativi, da quelli rudimentali di Papin fino ai moderni motori a scoppio; e d'altra parte l'analisi concettuale dello studio dei moti dei proiettili ha condotto Galileo, dopo cinquant'anni di meditazioni, alla formulazione semplice e chiara delle prime leggi della meccanica.

Ancora lo studio delle traiettorie dei proiettili ha condotto gli studiosi, da Tartaglia e da Cardano in poi, fino a Newton ed ai moderni scrittori di balistica, alla formulazione delle leggi della resistenza dell'aria. Lo studio di queste ultime leggi è stato sviluppato da Newton per demolire le confuse e fantastiche teorie di Cartesio sui vortici e per dimostrare che le comete girano intorno al sole descrivendo parabole esattissime senza alcuna perturbazione incontrata da un mezzo resistente. D'altra parte Giovanni Alfonso Borelli (sviluppando un'idea di Galileo, che a sua volta aveva sviluppato un'idea di Aristotele) studiò durante tutta

la sua vita il moto degli animali in un'opera celebre, stampata qui in Roma mentre egli moriva, nel 1680, nella quale un intero capitolo è dedicato allo studio del volo degli uccelli. Anche qui la soluzione, dei problemi posti è errata; ma questi sono posti con precisione ed è per la prima volta considerato il problema meccanico che bisognava risolvere per capire perchè gli uccelli volano.

Il problema posto da Borelli, sarà risolto quasi due secoli dopo da un celebre fisiologo francese, Ernesto Marey, il quale dopo vent'anni di studio del moto degli animali, dedica infine nel 1889 un intero volume al volo degli uccelli. Ma è un volume conclusivo, nel quale sono descritti con precisione, ma non ancora costruiti, i primi aeroplani; vi è indicata l'ampiezza delle ali il peso del motore, e la forza del motore. Si prevede anche che il futuro motore degli aeroplani sarà un motore a scoppio. Marey fu aiutato nella sua opera dalle ricerche dei fisici, le prime delle quali risalgono a Newton, i quali avevano precedentemente approfondito lo studio della resistenza dell'aria. Questo studio aveva formato oggetto degli studi di Newton, perchè egli voleva dimostrare l'inesistenza dei vortici di Cartesio, e di qualunque mezzo resistente che avrebbe dovuto alterare i moti dei pianeti. Successivamente altri scrittori di balistica studiavano la resistenza dell'aria per analizzare la traiettoria dei proiettili, ed altri astronomi studiavano le traiettorie degli aeroliti nell'atmosfera.

Questo spiega come un astronomo americano, Samuel Pierpont Langley, pubblicasse nel 1904 un grosso volume di ricerche, risultato di molti anni di esperienze, sulla resistenza dell'aria, e come infine egli ottenesse dal Ministero della Marina americano qualche milione di dollari per costruire un aeroplano dotato di un motore a vapore, che, avrebbe potuto volare, ma che non volò perchè non c'era alcun aviatore che sapesse guidarlo. Langley morì nel 1906 e l'apparecchio fu collocato in un museo. Nel 1911 l'aviatore americano Curtiss tolse quest'apparecchio dal museo e volò.

Occorreva quindi un'altra serie di ricercatori, che risale al nostro Rinascimento, e qui, e forse soltanto qui, compare il nome di Leonardo da Vinci. Per imparare a volare bisognava apprendere il modo, osservare le manovre degli uccelli, ed apprendere l'uso dei cervi volanti, degli aeroplani senza motore, che oggi si chiamano alianti. Il primo aliante volò forse a Siena nel secolo XVI, volò per qualche metro e poi si ruppe un'ala ed una gamba del volatore. Più conclusivi furono i voli del tedesco Otto Lilienthal, il quale con un aliante scivolava per molte volte di seguito nell'aria dall'alto di una collina. Le sue esperienze furono fotografate e riprodotte poi in America dai fratelli Wright, i quali utilizzarono gli studi teorici e pratici dell'astronomo Langley. Ma perchè un apparecchio così costruito potesse diventare pratico, occorreavano tutte le risorse, tutta la scienza secolare dell'arte di

costruire macchine di ogni genere, che si era sviluppata nelle officine d'Europa, nei primi arsenali di Venezia e di Genova, e poi nelle officine sempre più complesse di Francia, d'Inghilterra, di Germania e d'America.

Occorre aggiungere che la prima analisi matematica di un colpo d'ala, studiato scientificamente e descritto dal punto di vista meccanico, era stata fatta in seguito ad una richiesta del fisiologo Marey, in un calcolo eseguito da un dotto ufficiale di artiglieria francese, misurando accuratamente 24 fotografie di un piccione in volo, ottenute col primo cinematografo inventato proprio per questo scopo dallo stesso Marey, aiutato dai costruttori di macchine e prodotti fotografici, i fratelli Lumière, uno dei quali, anche per questo, fu poi nominato membro dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

Questa sommaria descrizione della storia degli aeroplani si può ripetere per ogni altra conquista, sia nel campo della tecnica come in quello delle scienze pure, l'astronomia, la fisica ed anche la matematica pura.

L'ultimo risultato, quando appare al pubblico, è il frutto delle ricerche ininterrotte e continue di studiosi che si seguono nei secoli, i quali intrecciano i loro sforzi e comunicano i loro risultati gli uni agli altri, nel modo più inaspettato. Essi sono molti, ma non sono un numero infinito, non sono una folla indistinta. Raramente le loro scoperte sono il risultato del caso; ognuno di

essi può soltanto dire: «Io ho cercato con pazienza e con attenzione ed ho quasi sempre trovato qualcosa di più di quello che cercavo».

Mi sembra così aver dato un'idea chiara del perchè i Cinesi non hanno inventato, nè costruito, un aereoalano.

Mi spiegherò ancor meglio con un esempio. Quando partii per la Cina viaggiavo su una nave tedesca, che aveva a bordo due giovani Cinesi che avevano studiato, (ma non molto) in Europa. Uno di essi copiava nel suo taccuino, il *punto*, cioè le coordinate (latitudine e longitudine della nave) calcolate dal capitano e pubblicate a mezzogiorno ai passeggeri di bordo. Egli credeva forse ingenuamente che questa serie di punti costituisse una cognizione utile da riferire ai suoi concittadini, e non si rendeva conto che il capitano della nave determina con precisione ogni giorno il luogo dove l'hanno condotto le circostanze del viaggio, i venti, le correnti e in conseguenza, a seconda delle condizioni meteorologiche, decide ed ordina ogni giorno la rotta da seguire. Le rotte non si studiano a memoria una volta per sempre, ma sono il frutto di una scienza complessa e varia; soltanto chi la possiede sa navigare in ogni mare. Così ci ha insegnato in Europa Cristoforo Colombo.

I Cinesi sono uomini intelligenti come noi. Se in Europa nel secolo scorso avessimo avuto una migliore conoscenza della letteratura cinese, avremmo appreso che i primi aquiloni furono adoperati in Cina dal generale cinese Han Hsin, morto nel 196 a.

C. per comunicare con gli abitanti di una città assediata al disopra dell'esercito assediante.

Marco Polo racconta in un passo della sua meravigliosa relazione (rimasto inedito finchè nel 1928 Luigi Foscolo Benedetto lo scopriva in un manoscritto dell'Ambrosiana di Milano) che ai suoi tempi l'aquilone era adoperato da uomini i quali osavano salirvi sopra, facendovisi legare, dopo aver bevuto per farsi coraggio. Lo stesso uso degli aquiloni è raccontato da scrittori giapponesi, inosservati in Europa fino a pochi anni or sono.

Noterò infine che uno di quei popoli che sono oggi considerati come barbari e primitivi, ha adoperato e adopera gli aquiloni per la pesca (si veda *Henry Balfour, Kite Fishing*, Miscellanea Ridgeway, Cambridge 1913, p. 583-608). I Malesi di Singapore ed i Giavanesi di Giava hanno forse appreso dagli abitanti delle Molucche l'uso dell'aquilone fatto con una foglia di felce (*Polypodium quercifolium*) che solleva in alto la lenza e spinge l'amo assai lontano dalla barca dei pescatori. Questo stesso metodo si trova sviluppato, perfezionando in vario modo l'aquilone, cambiandone la forma e la materia (per esempio, foglie di palma cucite insieme con fibre vegetali nelle Isole Salomone, nelle Isole Marshall e altrove). Si tratta di un'invenzione descritta da H. Balfour, il quale dimostra che non si tratta di un'invenzione casuale, sorta qua e là, ma di un risultato ritrovato in qualche punto dell'Arcipelago Malese e poi diffuso e sviluppato, perfezionato nelle regioni circostanti.

Il problema di cui parlo quest'oggi ha preoccupato e ha destato le ansie di un gruppo di studiosi cinesi, in una serie di discussioni che ebbero luogo a Kyoto, nell'*Institute of Pacific Relations* nel 1929<sup>1</sup>; raccolte poi in un volume che si apre con uno studio del dott. Wenchiang Ting sul modo col quale la Cina ha acquistato la sua civiltà. Alcune pagine di questo studio – che qui riassumiamo – confermeranno la tesi che oggi qui mi sono proposto di esporre.

«La versione confuciana della preistoria cinese (egli dice) si inizia con l'accettazione di una successione di leggende relative ad un'antica età dell'oro, decaduta rapidamente durante il lungo periodo della formazione della Cina feudale. Sono nozioni altrettanto fantastiche quanto i miti dell'India bramantica. I missionari e i diplomatici europei che nel secolo XVIII cominciarono a studiare la storia della Cina, accettarono volentieri queste dottrine, perchè l'idea di una Cina decadente e retrograda offriva una giustificazione dell'opera loro ed accarezzava l'idea della superiorità progressiva dell'Europa. La resistenza opposta dai Cinesi agli avventurieri europei, i quali cercavano colla violenza di

---

<sup>1</sup> Si veda l'interessante *Symposium on Chinese Culture*, edited by Sophia H. Chen Zen, published by China Institute of Pacific Relations, Shanghai, 1931.

imporre i loro commerci non desiderati dai Cinesi, era così considerata come una prova del misoneismo e dell'impenetrabilità cinese alle influenze culturali straniere. La civiltà cinese appariva così come una sopravvivenza anacronistica di una civiltà che avrebbe dovuto scomparire come erano morte le civiltà d'Egitto e di Babilonia, ma che riusciva a sopravvivere per ragioni misteriose. Anche un colto e valente studioso come Marcel Granet<sup>2</sup> sostiene inconsciamente che la storia della Cina anteriore all'87 a. C. costituisce la somma totale della civiltà cinese».

E veramente il Granet sostiene che «il pensiero filosofico cinese vuole conservare la sua indipendenza da ciò che noi chiamiamo la scienza. I progressi dello spirito scientifico non hanno esercitato sul pensiero cinese nessuna influenza sensibile». E più oltre aggiunge: «Ecco come i Cinesi concepiscono il processo di un'invenzione. Quando uno dei loro filosofi vuol spiegare l'invenzione della ruota, afferma che l'idea gli è stata suggerita dai fiori (o meglio dalle infiorescenze) trascinate dal vento. Ribelle alle spiegazioni meccaniche, il pensiero cinese non cerca di esercitarsi nel campo del moto e delle quantità, ma si limita a restringersi in un mondo di emblemi, che non vuole distinguere

---

<sup>2</sup> M. GRANET: *La civilisation chinoise*, Parigi, 1929, ed il successivo volume *La Pensée chinoise*, Parigi, 1934; cfr. specialmente le pag. 22, 334.

dall'universo reale».

Nulla è più lontano dalla realtà storica, osserva giustamente il dottor Ting. L'archeologia moderna ha dimostrato l'esistenza di un'età neolitica cinese che precede l'età del bronzo. Le antiche iscrizioni in bronzo, le decine di migliaia di iscrizioni su scaglie di tartaruga, ci mostrano chiaramente che la civiltà cinese ha progredito lentamente ma continuamente e non è mai stata arrestata nel suo movimento dalle guerre civili o dalle invasioni barbariche.

Possiamo con sicurezza ricostruire i diversi stadii attraverso i quali sono passate le sue istituzioni politiche e sociali, il suo sviluppo mentale non solo nella Cina antica, ma anche nella Cina medievale e moderna. La Cina ha sempre adottato e assimilato tutte le nozioni utili ricevute dall'Occidente, ogni volta che le è stato possibile.

Henri Maspero<sup>3</sup> ha invece con acutezza osservato come la Cina abbia arricchito le sue nozioni pratiche, scientifiche e filosofiche dopo le spedizioni di Dario e più ancora quelle di Alessandro Magno, che permisero l'introduzione in Cina dei primi strumenti matematici, squadra e compasso, gnomone, le prime proprietà dei circoli e dei quadrati.

Spero dimostrare in un'altra comunicazione quale stretto legame unisca la formazione dei concetti matematici più astratti,

---

<sup>3</sup> H. MASPERO: *La Chine antique*, Parigi, 1927, p. 616-620.

con lo sviluppo della tecnica. Ma lo sviluppo della scienza europea moderna è assai più complesso di quanto comunemente si crede. Basti pensare che la civiltà egiziana e babilonese (e qui è un po' inesatto il dott. Ting) non è veramente tutta morta. Nei nostri orologi sopravvive la divisione dell'unità in sessanta parti, il sistema sessagesimale dei Babilonesi. Ad essi dobbiamo le costellazioni dello zodiaco, agli Egiziani gli obelischi, i gnomoni, cioè le meridiane solari...

Ma Grecia e Roma erano vicine al «Vicino Oriente». I Cinesi, circondati dai barbari, ebbero soltanto rari ed insufficienti contatti con altri popoli più civili di loro.

Giustamente il dott. Ting sostiene che la civiltà cinese è relativamente recente, che la civiltà cinese comincia almeno due millenni dopo quella dei Sumeri e degli Egiziani. L'età del bronzo è in Cina seguita dall'età del ferro soltanto assai tardi, non prima forse del VI secolo a. C., molti secoli dopo l'Egitto e Babilonia, e forse un millennio dopo l'India.

L'evoluzione della lingua e della letteratura è lenta ma continua. Soltanto durante la dinastia *Han* (206 a. C. fino al 203 d. C.) la prosa cinese può competere, col suo grande storico Sse-ma Ts'ien, con quella degli storici occidentali.

La fabbricazione della porcellana (stimolata forse dalla importazione di smalti e di vetri dall'Occidente) si sviluppò soltanto durante il nostro medioevo e raggiunse la perfezione dopo un millennio di continui progressi graduali.

Così l'agricoltura non è stazionaria; ad esempio, numerose piante giunte in Europa dall'America, il granturco o mais, le patate dolci introdotte dagli Europei in Cina, furono coltivate abbastanza presto, poco meno che in Europa.

Ed ancora la civiltà cinese, invece che xenofoba, tende ad espandersi; la cultura cinese, osserva ancora il dott. Ting, si è estesa da un primo nucleo assai ristretto nel bacino medio del Fiume Giallo, a tutta la Cina, incivilendo ed assimilando le varie razze che lo circondavano, estendendosi ai Tibetani, ai Mongoli, ai Tungusi, ai Coreani ed ai Giapponesi, ed al sud agli Indocinesi. In questi ultimi decenni si è estesa a tutta la Manciuria. È un compito non inferiore a quello, non sempre raggiunto, dell'Impero Romano.

Vediamo ora in particolare lo sviluppo di alcune scienze in Cina. L'aritmetica. Gli antichi Cinesi, oltre alla nostra aritmetica decimale, adoperata nella contabilità e nel commercio, ebbero, nelle loro speculazioni divinatorie, anche un'aritmetica binaria, cioè un'aritmetica in cui, invece di dieci cifre, si hanno soltanto due cifre: zero ed uno. Ma la adoperarono unicamente in modo assai limitato nei loro libri di divinazione (corrispondenti forse ai *libri sibillini* dei Romani). In Europa questa nozione di aritmetica binaria apparve assai più tardi, ed è dovuta al grande matematico scozzese barone Giovanni Nepero, il quale la pubblicò col nome di *Aritmetica locale* nella sua *Rhabdologia*, stampata nel 1617. Ma ai Cinesi non offriva nessun particolare interesse. Essi,

durante il nostro medioevo (forse nel secolo XIII) avevano ricevuto il metodo di calcolare dei Greci e dei Romani, per mezzo di una serie di *gettoni* (o calcoli) disposti in doppia colonna sopra una tabella (*abaco*). È un metodo assai comodo per i commercianti ed i banchieri ed è adoperato ancor oggi non solo in Cina, ma anche in Russia e in Giappone.

Ma non si possono accusare i Cinesi di non aver visto come Nepero che la numerazione binaria presenta singolari vantaggi sull'aritmetica decimale e può diminuire le fatiche dei calcolatori, come in tutt'altro modo Nepero era riuscito a fare calcolando le prime tavole dei logaritmi. Finora soltanto i matematici ne hanno tratto alcune interessanti applicazioni in ricerche di matematica superiore, ma si può prevedere che in un lontano avvenire gioverà anche in altri campi. Ma voglio qui notare che questa scoperta di Nepero, spedita come sua dal filosofo tedesco Leibniz (uno dei suoi tanti plagi) ai suoi corrispondenti gesuiti in Cina, ebbe un deplorabile effetto. Essa contribuì ad accreditare in alcuni dotti ed acuti missionari gesuiti, il P. Bouvet, il P. Gaubil e più tardi il P. Premare, la leggenda cinese di un'antica scienza perduta, già posseduta dagli antichi Cinesi e poi ritrovata dagli Europei. Questa idea non vera contribuì a far credere ai Cinesi colti a contatto coi missionari cattolici che la scienza europea non meritava poi tanto di esser studiata, se gli studiosi europei avevano scoperto così tardi qualche cosa che i Cinesi già conoscevano fin da tempi assai più antichi...

L'introduzione del Buddhismo in Cina e poi successivamente il contatto con i Persiani e con gli Arabi, accrebbero le nozioni astronomiche e geografiche dei Cinesi. Altre nozioni sull'arte di costruire navi e di navigare negli oceani furono portate in Cina dai navigatori persiani ed arabi.

Ma queste nozioni non si svilupparono in Cina per varie ragioni che è qui troppo lungo esporre, di guisa che quando Matteo Ricci, verso il 1600, tradusse Euclide, gli studiosi cinesi apparvero a prima vista sorpresi ed ammirati. Ma non potevano vedere nessuna applicazione, nessuna utilità in queste nozioni di geometria pura, all'infuori di quella della rettificazione del calendario, e rimasero nell'illusione che la scienza europea valesse poco più di questo. Ricorderò a questo proposito che nel secolo XVII Keplero diceva che egli poteva studiare astronomia perchè era pagato come astrologo dell'Imperatore d'Austria: la figlia pazza, l'astrologia, manteneva la sorella savia, l'astronomia. Ed anche nel secolo XVIII uno dei più notevoli redditi dell'Accademia delle Scienze di Berlino era la vendita di calendari di cui aveva il monopolio, come risulta da una lettera del suo grande presidente, l'italiano Giuseppe Luigi Lagrange!

Posso assicurare però i miei ascoltatori, che è dovuto soltanto a circostanze esterne ed assai singolari che la Cina sia rimasta isolata dall'Europa.

Nel secolo XV numerose spedizioni navali erano state inviate

dalla Cina in Occidente ed erano giunte fino alle coste della Somalia. Ma i prudenti governanti cinesi, dopo aver considerato che queste spedizioni costavano assai care in uomini ed in danaro e non riportavano in Cina che oggetti di pura curiosità (ad esempio le giraffe e l'incenso della Somalia, il legno di sandalo, i profumi e le spezie dell'Insulindia), che incoraggiavano il lusso e lo spreco delle corti e dei ricchi, persuadevano l'Imperatore a sospenderle.

Si ripeté così quanto era già accaduto ad un viaggiatore cinese ai tempi dell'Impero Romano, il quale giunto sulle sponde della Siria seppe bensì dire che lontano al di là del mare c'era un altro grande popolo, un'altra grande Cina (in cinese *Ta-ts'in*), cioè l'Impero Romano, che così fu allora chiamato in Cina in seguito alla sua relazione, ma che non valeva forse la pena di recarsi fin laggiù, dove dopo tutto non c'erano che *altri uomini* ed *altre genti*. Proprio lo stesso sentimento di indifferenza oggi comune più di quanto non si creda in Europa ed anche in America.

Lo stato delle cose oggi è questo. Poche decine di studiosi, poche centinaia di studenti in Europa sanno che cos'è la civiltà cinese. Per una curiosa inversione di posizioni, proprio oggi vi sono alcune migliaia di Cinesi che cominciano a capire che cos'è la civiltà europea. E la studiano e credono ancora che in Europa non c'è da imparare soltanto una nuova tecnica, nuove macchine e nuove invenzioni, ma che esiste una scienza europea la quale ha le sue origini nella civiltà greco-romana e cristiana.

Purtroppo non sono soltanto le folle cinesi a dubitare di questa semplice verità: ma ne hanno dubitato i popoli i quali hanno oggi tanto scompigliato il mondo, e forse non ne sono ancora sicuri alcuni dei popoli vincitori di questa seconda guerra mondiale. Ma la verità non muore finchè vive nelle menti umane. Le verità si propagano e sopravvivono agli imperi; non dipendono dagli interessi mutevoli e transitori, ma consolano chi le possiede e si accrescono quando si propagano e si diffondono nel mondo.

## II

### Matematica e tecnica

### Origine e sviluppo dei concetti matematici

*Conferenza tenuta venerdì 27 aprile 1945 al Centro per la Storia della  
Tecnica e del Lavoro, in Roma*

P. L. Cebiscev (Tchebychef) in un discorso pronunciato nel 1856 (*Oeuvres*, t. I, p. 239) all'Università di Pietroburgo, ha osservato che le scienze matematiche attraggono l'attenzione generale a causa della loro influenza sulle arti e l'industria. Ma reciprocamente le scienze si sviluppano sotto l'influenza della pratica. È la pratica che scopre i nuovi argomenti di studio e i punti di vista nuovi sui soggetti noti da molto tempo. I nuovi problemi che sono posti dalla tecnica alla scienza, danno origine alla scoperta di nuovi metodi. La scienza trova una guida sicura nella pratica. Questa osservazione del grande matematico russo si può adoperare quando cerchiamo di renderci conto dell'origine e dello sviluppo dei concetti matematici fino dai primordi della vita civile.

Vito Volterra<sup>4</sup>, preparando in una seduta promossa dalla Società Italiana di Scienze Naturali nel 1906, la ripresa dei congressi

---

<sup>4</sup> VITO VOLTERRA: *Saggi scientifici*, Bologna, 1920, p. 101. Si

degli scienziati italiani vide la necessità di riunire tutti coloro che amano la scienza. E nel successivo anno 1907 inaugurando il primo congresso della Società italiana per il Progresso delle Scienze osservò che, talvolta la tecnica precede la scienza. «Watt e Stephenson erano due pratici (egli diceva), che col loro genio sono assurti dall'officina all'accademia delle scienze ed all'alta industria; essi attestano che, almeno nel periodo eroico di creazione delle macchine a fuoco, fonte dei più ingegnosi e famosi trovati fu l'officina stessa. Solo in seguito la scienza, scrutando il funzionamento delle macchine industriali, costruì quel mirabile monumento che accoglie tutti i fenomeni della natura e li domina con i concetti della termodinamica».

La matematica comincia con la scrittura, non con la lingua parlata. Questa opinione è confermata dall'analisi etimologica, di cui do un solo esempio, *calcolare* significa adoperare *calcoli*, cioè sassolini.

Già nell'età neolitica si trovano iscrizioni che rappresentano con segni vari oggetti, uomini, animali. L'uomo, *homo sapiens*, differisce dagli animali non solo perchè sa accendere il fuoco, ma perchè sa rappresentare con segni ciò che vuole comunicare agli

---

veda una sua biografia di E. T. WHITTAKER, *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society, Vito Volterra*, Londra, 1941.

altri uomini; quanti sono i suoi compagni, quanti sono i suoi nemici, quanti animali sono stati uccisi a caccia, quanti animali alleva, custodisce, o soltanto ha visto lontano. Anche un gatto, un leone, un cane, una formica, sanno scovare una preda, ma non sanno in alcun modo rappresentarla in maniera chiara e trasmetterla ai loro simili, se non nel modo vago ed indistinto dell'agitazione che indica la preparazione all'azione che stanno per compiere. I cacciatori anche oggi riconoscono nei cani da caccia tutto quanto un cane sa esprimere per annunciare la selvaggina.

Soltanto l'*homo sapiens* la sa *rappresentare*, cioè pensare. Non è necessario, perchè questo primo atto d'intelligenza si manifesti, che esso sia espresso con parole. Gli etnologi hanno più volte osservato che un selvaggio che non sa contare, con alcuni sassolini, con dei frammenti di foglie, dei segni qualsivogliano, sa trasmettere ad altri la descrizione di quante cose lo interessano: barche, alberi e simili. A chi gli domanda «quanti siete in famiglia?» risponde con sicurezza: «Questo sassolino sono io, questa è mia moglie, questo un bambino, questo un altro bambino, e così via; ecco qui tutta la mia famiglia».

Non ha certamente l'idea astratta nostra del *quanto*, l'idea astratta del numero, ma sa calcolare, cioè *rappresentare*, anche con prontezza e precisione, ciò che lo interessa. Un tale uomo ha già una nozione dell'aritmetica. Analogamente l'uomo (*homo sapiens*) soltanto sa rappresentare un itinerario da seguire per giungere ad un dato luogo, per terra o per mare. Anche gli animali tracciano,

forse anche non del tutto inconsciamente, sentieri che li conducono al covo, alla tana, al luogo ove giace una preda uccisa. E questi sentieri, tracciati da uno di essi, sono seguiti dagli altri. Ma soltanto l'uomo sa *rappresentare* con segni tali sentieri, non visibili sul suolo. Sono assai interessanti alcuni intrecci di bastoncini flessibili coi quali gli indigeni della Polinesia sanno indicare la posizione relativa di varie isole che li circondano e verso le quali vogliono navigare. Se ne vedono due riprodotti nell'Enciclopedia Italiana, nell'articolo *Cartografia* (vol. IX, p. 237). Questi intrecci sono rappresentazioni *geometriche*, corrispondono alle carte geografiche dei nostri navigatori, e ci permettono di riconoscere in questi indigeni l'intelligenza e l'attitudine alla geometria, anche se mancano loro ancora le idee astratte di distanza, linee rette o curve, figure.

L'uomo primitivo che guarda il cielo sa rappresentare con segni i giorni che si succedono gli uni dopo gli altri, e sa trasmettere questa idea agli altri; egli ha chiara, precisa, identica alla nostra, l'idea di tempo, di ieri e di domani, di passato e di presente, di futuro, anche se gli mancano le parole con cui rappresentare queste idee astratte.

Anche i ragni sanno sollevare pesi troppo gravi per le loro forze legandoli dapprima con un filo ad un ramo e poi tirando questo lateralmente con un secondo filo unito al primo in qualche punto intermedio. Ma soltanto l'uomo sa comunicare ad un altro una tale azione rappresentandola in qualche modo con

strumenti o con segni. Quest'uomo ha un'idea della meccanica.

Queste ed altre considerazioni ci permettono di vedere come queste ed altre idee matematiche astratte sono sgorgate, direi quasi, le une dalle altre nei secoli dalla vita attiva ed operosa dell'*homo sapiens*.

Lo studio e l'analisi della lingua ci permette talvolta di precisare la posizione relativa nei secoli del sorgere delle varie civiltà.

Se oggi vogliamo indicare ad un bambino, mostrandogli il cielo stellato, la costellazione di Pegaso, gli diciamo «guarda lassù in cielo quel grande *quadrato*»; se vogliamo fargli osservare i diversi colori di Procione, di Sirio e di Betelgeusa, gli facciamo osservare il grande triangolo che formano queste splendide stelle, bianco azzurra l'una, bianco latte l'altra, rosso rame la terza. Ma possiamo farlo perchè i nostri bambini vedono come oggetti famigliari quadrati e triangoli.

Gli antichi Sumeri e poi i loro successori Assiri e Babilonesi, molti secoli prima di aver posseduto nozioni geometriche e forse (direi quasi probabilmente) popolazioni preistoriche, avevano popolato il cielo di uomini, leoni, serpenti ed uccelli di varie forme e atteggiamenti, perchè erano queste immagini le sole che essi avevano per rappresentare con parole le costellazioni osservate. Dove noi vediamo nella costellazione di Orione un quadrilatero allungato, ciò che noi chiameremmo i suoi quattro vertici sono chiamati spalla destra, spalla sinistra, piede destro, piede

sinistro, di un uomo in piedi.

Gli animali delle dodici costellazioni dello zodiaco ci sono stati trasmessi dalla Mesopotamia, e dalla stessa regione attraverso l'Iran o l'India sono giunti fino in Cina. La ricchezza e varietà di nomi che ci descrivono il cielo come ce lo hanno tramandato i Greci, i quali lo hanno ricevuto dalla Mesopotamia, confrontata con la povertà e rudimentalità di analoghe rappresentazioni nell'astronomia cinese, ci fanno già sospettare con sicurezza che questa è stata un acquisto recente (forse del IV o V secolo a. C.). Questo sospetto si avvicina alla certezza quando si osservano le più antiche carte celesti cinesi (assai poche rispetto a quelle tramandateci in Occidente), le quali raffigurano le costellazioni per mezzo di triangoli, poligoni ed altre figure geometriche, più soddisfacenti oggi per noi e più somiglianti a quelle dei nostri atlanti stellari, ma le quali ne rivelano l'origine assai recente dovuta forse agli Indiani, ai Persiani o agli Arabi nel nostro medioevo.

I concetti matematici sorgono parallelamente agli strumenti adoperati dagli uomini nelle loro operazioni, nella tecnica. I più antichi strumenti sono stati forse già in epoca preistorica (sassolini) calcoli, e la tavola (abaco) su cui disporli. Invece di calcoli furono ben presto *sbarre* od altri segni curvi, incisi o dipinti sulle pareti di una grotta o di un tempio.

Circoli e quadrati sono figli del compasso e della squadra,

strumenti ignoti ai Cinesi del principio del primo millennio avanti C. Questi strumenti compaiono soltanto in Cina dopo che già da almeno due millenni prima erano stati adoperati in Mesopotamia ed in Egitto. Basta perciò ricordare la pianta di un tempio accuratamente tracciata sopra una tavola che sta sulle ginocchia della famosa statua di un architetto Gudea. L'originale di questa statua che si trova al Museo del Louvre è riprodotto in fotografia nella tavola CLV dell'Enciclopedia Italiana, articolo *Babilonia e Assiria*, vol. V, p. 752 ed anche p. 738 del testo. Essa rappresenta il governatore sumero Gudea, di Lagash nella Babilonia meridionale, che risale al 2500 a. C. La figura del principe Gudea, che un giorno fu celebre e fu divinizzato ed a cui fu prestatato un culto nel tempio del suo dio, era ivi rappresentata come l'architetto costruttore del tempio. Un fac-simile di questa statua si trovava nel Museo Barracco così inutilmente demolito e scompigliato qui a Roma alcuni anni or sono.

Squadra e compasso compaiono in una raffigurazione di un imperatore mitico cinese dal corpo umano e dalla coda di pesce. La forma artistica con cui è rappresentato ci conferma che mito e strumento sono (in Cina) importazione straniera e relativamente recente.

Il regolo o riga, il cordino (la *sinopia* di Dante) sono assieme alla sega e alla pialla gli strumenti con cui i falegnami tracciano linee rette e livellano piani. L'archipendolo, il filo a piombo e la più moderna e perfezionata livella, sono strumenti indispensabili

del costruttore di edifici, di strade, di canali per l'irrigazione. L'aratro e i solchi che esso traccia imprimono nella mente dell'agricoltore le idee di ordine, di parallelismo, di regolarità, che la messe rigogliosa nasconde fino alla mietitura, ma che riappare evidente dopo il raccolto. Il rigore e la precisione con cui i solchi sono stati tracciati manifestano con un solo sguardo la perizia o l'inesperienza di chi li ha tracciati.

Il tornio e la ruota, che sono rimasti ignoti alla civiltà americana; la vite che è certamente una conquista greca non antichissima (forse dovuta ad Archimede stesso) si è propagata lentamente tra noi, ed era sconosciuta ai Cinesi ed ai Giapponesi. Essa è forse uno strumento caratteristico della nostra civiltà occidentale.

La *catena* è uno strumento adoperato dagli agrimensori. Della sua importanza e significato avrò altrove occasione di parlare a lungo.

Lo squadro agrimensorio o traguardo permette di tracciare angoli retti sul terreno.

Un'altra serie di strumenti è caratteristica delle civiltà agricole: la bilancia e i pesi campione, i recipienti vari, come il moggio e il barile, per pesare o misurare i raccolti.

Infine le monete di vario peso e di varia forma completano gli strumenti necessari allo svolgersi di una vita *civile* o *cittadina*. Il piano inclinato, i rulli per trasportare massi pesanti, adoperati nella costruzione delle piramidi, infine gli obelischi, gnomoni,

sono stati adoperati dagli antichi Egiziani come orologi solari.

Questi strumenti adoperati dagli antichi hanno offerto ai calcolatori, ai contabili, ai ragionieri, agli agricoltori, ai navigatori, ai mercanti, un modo *razionale* di procedere nella loro azione multiforme.

Ai sacerdoti, ai governanti, fu per vari millenni affidato il *computo* del tempo. Una delle più antiche eredità, una delle più diffuse del mondo occidentale, è la settimana, quel periodo ininterrotto che si svolge con continuità fino ai nostri giorni e rappresenta, come può, il periodo di una fase lunare.

Ma non si è imposto senza esitazioni. Il periodo di otto giorni rappresenta una fase lunare un po' meno esattamente, ma pure non è lontano dal vero per eccesso. È stato adoperato per molto tempo dai Romani, ed ha finito per cedere il posto alla settimana. I Romani chiamavano *nundinae* un periodo di otto giorni, mentre il nome proviene etimologicamente dal numero nove. Si tratta dello stesso fenomeno che si riproduce nella nostra lingua quando diciamo «oggi a otto» per indicare lo spazio di tempo che corre da un lunedì all'altro. Sono sette giorni, ma se ne contano otto se contiamo entrambi i lunedì.

Questa incertezza nel contare si risolve con sicurezza soltanto nel secolo XIX. Noi oggi troviamo più semplice e comodo cominciare a contare così: 0, 1, 2, 3,... Nelle scuole greche e romane si insegnava a contare invece partendo da uno: 1, 2, 3... Anzi per

i Greci nemmeno uno era un numero, ma soltanto l'*origine* dei numeri; il primo numero era il due.

Questo modo di contare, che a noi sembra imperfetto, è quello adoperato dai cronologi, i quali conoscono gli anni dopo Cristo 1, 2, 3 fino al nostro anno 1945, e numerano gli anni avanti Cristo ancora 1, 2, 3, 4, 5... di guisa che per essi non esiste l'anno zero, producendo confusione ed incertezza quando si voglia calcolare quanti anni sono trascorsi da una data avanti Cristo ad una dopo Cristo. *L'introduzione dei numeri negativi* nel nostro Rinascimento, dovuta forse ai contabili abituati e costretti a bilanciare debiti e crediti, ha chiarito ogni dubbio ed esitazione.

Eppure la frase *zero è un numero*, *zero è il primo numero*, che conviene insegnare nelle scuole, meravaglia forse più d'uno, e non trova consenzienti molti maestri.

La distinzione tra l'*uno*, il primo numero secondo i Greci, e l'*aggiunger uno*, l'operazione che applicata ad un numero produce il numero successivo, è stata già fatta dai Greci.

Essi, ed erano già gli antichi Pitagorici, hanno fatto lunghi discorsi, talvolta acuti, per distinguere i due concetti di  $\mu\upsilon\nu\acute{\alpha}\varsigma$  (aggiungere uno) ed  $\varepsilon\nu$  (il numero uno). Ma la nota essenziale della differenza è loro sfuggita. Soltanto nella seconda metà del secolo XIX è stata enunciata per la prima volta da due matematici tedeschi, Hermann Grassmann (1861) e Riccardo Dedekind (1872 e 1888), da un filosofo francese, Ippolito Taine (nei suoi due volumi *De l'intelligence* pubblicati nel 1870) e finalmente in

modo definitivo e semplice da Giuseppe Peano nel 1889 in un suo opuscolo *Arithmetices Principia nova methodo exposita*. L'affermazione *zero è un numero*, posta a base dell'aritmetica, dovuta allo stesso Peano, è ancora più recente (1898).

L'aritmetica e le operazioni di addizione e sottrazione sono state eseguite per lunghe successioni di secoli dai contabili, dagli impiegati del governo civile e dai capi degli eserciti, per regolare le fatiche, l'attività e gli sforzi del popolo. Un progresso ulteriore è sorto in questo periodo di tempo, il concetto di moltiplicazione. Non è sorto così come noi lo abbiamo tutto in una volta. Ma ne possiamo rintracciare uno stadio intermedio, assai interessante, nel popolo egiziano. I calcolatori egiziani non avevano bisogno di quella tavola che noi chiamiamo pitagorica, la quale tormenta i primi anni dei nostri bambini.

Essi si limitavano ad adoperare un'operazione più semplice, quella di raddoppiare un numero; s'impara assai presto con sicurezza, e parimenti l'operazione inversa di dividere per due, e infine a distinguere i numeri pari dai numeri dispari. Per moltiplicare due numeri, ad esempio  $5 \times 9$ , faccio così: divido 5 per 2, trascuro il resto, trovo 2, divido 2 per 2, trovo 1. A fianco dei numeri così trovati, 5, 2, 1, scrivo i numeri ottenuti raddoppiando sempre il 9: 9, 18, 36. Infine faccio la somma di quelli di questi numeri che hanno al fianco un numero dispari: nel nostro caso 9 e 36. La somma  $9 + 36 = 45$  è il prodotto  $5 \times 9$ . Il metodo è comodo e pratico anche per grandi numeri e si potrebbe, come

utile esercizio, insegnare nelle nostre scuole.

Il perchè questo singolare metodo riesca dipende dal fatto che con questa operazione noi abbiamo rappresentato il moltiplicatore 5 in base 2 cioè  $5=2^2+0\times 2+1$ . Ma gli Egiziani non avrebbero saputo dirlo come ora ho fatto io.

Se gli uomini adottassero un giorno (forse lo faranno in avvenire) la numerazione binaria, questo metodo diventerebbe naturale. Non lo è soltanto perchè è l'incrocio di due modi diversi di calcolare in base 2 ed in base 10. Il nostro metodo in base 10 conduce al risultato come ho detto coll'uso della tavola pitagorica.

È interessante osservare che l'operazione della moltiplicazione  $5\times 9$ , puramente aritmetica, ha un senso perchè è la rappresentazione di un fatto geometrico, la determinazione della misura di un'area, il numero cioè dei quadrati di un rettangolo di lato 5 e di lato 9.

Potrebbe anche essere la rappresentazione di un lavoro compiuto: 5 giornate di lavoro di 9 uomini, del valore di una pezza di stoffa lunga 5 metri a lire 9 al metro; del peso di 9 oggetti ognuno dei quali pesa 5 unità di peso, e così via.

L'operazione aritmetica è sempre la stessa, ma l'interesse che essa presenta per noi consiste nella sua attitudine a rappresentare nella nostra mente le idee di lavoro, di valore, di peso.

L'aritmetica, anche considerata nella sua forma più astratta e pura, non ha senso, non ha interesse se essa non trova nelle sue

operazioni, talvolta assai complesse, una rappresentazione di valutazioni, osservazioni, giudizi, sensazioni, che ci si presentano in varie circostanze della nostra vita attiva.

I numeri quadrati 1, 4, 9, 16, 25,... e le loro singolari proprietà, si sono offerti alla contemplazione dei Pitagorici come l'osservazione di fatti geometrici. Il teorema che i quadrati si ottengono come somme successive dei numeri dispari, è geometricamente evidente, mentre esige in matematica pura uno sforzo mentale più complesso.

La curiosa osservazione che alcuni quadrati sono somme di due quadrati, ed altri non lo sono (p. es.  $9+16=25$ ) ha fatto loro ricercare tutti quelli che godono di tale proprietà. Diofanto ha visto che sono quelli la cui base è essa stessa la somma di due quadrati ( $5=4+1$ ;  $13^2=12^2+5^2$ ). Una opportuna analisi geometrica è più semplice della pura ricerca aritmetica.

I Pitagorici dai quadrati furono condotti a contemplare i numeri triangolari che si ottengono dalle somme successive dei numeri interi: 1,  $1+2$ ,  $1+2+3$ ,... cioè i numeri 1, 3, 6, 10, 15... Sono i punti che disposti in scala formano una successione di triangoli. Le loro proprietà sono più complicate di quelle dei triangoli. Gli antichi non seppero che questi numeri godono di proprietà ancora più meravigliose.

Ogni numero intero è quadrato, ovvero somma di 2 ovvero 3 ovvero 4 quadrati. Ogni numero è un triangolare, ovvero somma di 2, ovvero di 3 triangolari. Questi due teoremi, dimostrati verso

la metà del Seicento dal matematico francese Pietro Fermat, poichè la sua dimostrazione si era perduta, con faticosi sforzi fu dimostrata più di un secolo dopo dal matematico italiano Lagrange, e la seconda, assai più difficile, ancora una trentina d'anni dopo, nel 1801 dal matematico tedesco Gauss.

La ragione di questa difficoltà dipende da questo, che questi teoremi puramente aritmetici nella forma, vertono di fatto su enti geometrici, di geometria piana nel primo, e di geometria solida nel secondo di questi teoremi, e la via per esaminarli consiste nel considerare certe speciali operazioni geometriche, che possiamo, è vero, rappresentare per mezzo di concetti puramente aritmetici, ma sono sempre però semplici ed evidenti quando si considera l'origine delle relazioni geometriche degli enti che essi rappresentano.

Queste considerazioni ci aprono la via ad esaminare la formazione dei più semplici concetti geometrici. Punti, rette, cerchi, angoli, ci sono oggi familiari. Ma essi sono la conquista di lunghi e complicati svolgimenti della vita civile. La geometria di Euclide, che ci sembra così pura, è figlia della riga e del compasso. Sarebbe stata assai diversa se fosse stata costruita (e si poteva ben farlo) astraendo dall'uso seguito oggi dai nostri disegnatori, della squadra, ovvero di una riga, a bordi paralleli, od anche di una riga doppia snodata a parallelogrammo.

Teoremi e problemi si sarebbero succeduti in connessione assai diversa. Diversa ancora sarebbe stata, se si fosse adoperata,

come facciamo qui in Europa da poco più di due secoli (ma in Cina da quasi duemila anni) la carta piegata. Una piega ben fatta traccia una linea retta, una piega doppia ci dà subito un angolo retto. Ma i Greci non potevano farlo: non avevano carta, il papiro e la pergamena non si prestavano a questo scopo.

Ricordo soltanto che in tal caso costruire un pentagono regolare, scoperta di cui erano orgogliosi i Pitagorici, si riduce allora a fare un nodo (il nodo della cravatta) con una striscia di carta a bordi paralleli.

Diverso ancora sarebbe stato lo sviluppo della geometria se si fossero adoperati fin da principio fili per avvolgere curve piane, ovvero cilindri ed altre superfici solide. Questi procedimenti si sono sviluppati soltanto dal secolo XVI in poi, dando origine allo studio di numerose curve; ovvero ancora lamine elastiche, adoperate soltanto ai nostri giorni dai disegnatori.

La filatura e la tessitura, il fuso e le macchine per filare, la fabbricazione di corde semplici e ritorte, la trama e l'ordito dei telai; gli intrecci delle corde e la multiforme varietà dei nodi; la complessa formazione delle stoffe figurate o damascate; la tessitura a fili curvilinei, che ha il suo inizio nelle corazze ad anelli o a placche mobili, e si complica nell'intreccio delle reti per la pesca, nella costruzione delle ceste di vimini o di altre strisce di legno flessibili; ed infine la più recente scoperta (forse del secolo

XV) dei tessuti a maglia ed a calza (ignoti certamente nel medioevo) hanno aperto nuovi orizzonti ed un ampio campo di ricerche ai matematici presenti e futuri.

Una nuova scienza, chiamata confusamente da Leibniz *Analysis situs*, ha avuto i suoi primi saggi in alcuni scritti dello svizzero Eulero, nel secolo XVIII; ha avuto una prima trattazione elementare nell'*Encyclopédie* di D'Alembert per opera soprattutto di Vandermonde; timidamente sviluppata in sottili teoremi di Gauss e di Möbius, ha avuto il suo primo rigoglioso sviluppo nelle ricerche sulle correnti elettriche di Ampère, di Faraday, di Pacinotti, di Galileo Ferraris. Ma è soltanto in questi ultimi decenni, che avendo preso il nome di *topologia* da un fisico tedesco Listing (1847) è ora insegnata nelle nostre Università ed è destinata ad avere in avvenire un'importanza crescente.

Sono ricerche astratte, apparentemente lontane dal mondo fisico, dalle osservazioni dei nostri sensi, ma è proprio da queste esperienze, da queste sensazioni che traggono la loro origine e la importanza. Sono queste ricerche che ci permettono di classificare, ordinare e capire i risultati di meditazioni profonde che non sono guidate o spinte da utilità materiali od immediate, ma dai quali dipende l'avvenire della scienza.

Nuovi strumenti ancora sono quelli adoperati dagli astronomi, dai grandi quadranti di Tycho Brahe al cannocchiale di Galileo, ai grandi strumenti astronomici moderni, ai prismi che

trasformano un punto luminoso, a cui si riduce la luce inviataci da una stella, in un rettangolo in cui numerose linee ci rivelano la composizione chimica, la temperatura e l'esistenza stessa dei corpi che non possiamo vedere. E ne segue subito una intensa e drammatica ricerca sulla grandezza e la formazione dell'universo, da Copernico a Giordano a Keplero nel suo *Harmonices mundi* (1619), ad Huygens nel suo *Kosmotheoros*, a Schiaparelli nel suo acuto esame *sulle forme organiche e l'evoluzione naturale*, ed alle recentissime scoperte sulla Via Lattea, sulle correnti stellari, sulla meccanica celeste...

È questo senso di contemplazione di armonie finora incomprese, in cielo e in terra, nella vibrazione della luce delle stelle lontane, nell'analisi dei fenomeni chimici, nella contemplazione tutta intellettuale di enti che non abbiamo ancora veduto: atomi, elettroni, protoni, è questo senso di contemplazione che noi abbiamo appreso ad esercitare da Pitagora, da Platone, da Archimede, che da essi è stato trasmesso a Galileo, Huygens e Newton, e si estende e si allarga e si complica in infinite vie, e ci rende ad un tempo fieri di essere uomini intelligenti, e modesti perchè riconosciamo che queste contemplazioni sono un dono ricevuto dal cielo.

### III

## Logica matematica e logistica Sui postulati dell'aritmetica e la loro compatibilità

*Conferenza tenuta martedì 1 maggio 1945 nell'Istituto di Alta Matematica della R. Università di Roma*

Desidero iniziare questo discorso ridestando nella vostra memoria la figura di Giuseppe Peano (1858-1932), col quale ebbi lunga ed intensa familiarità durante vari anni della mia vita e specialmente nel decennio 1895-1905, e col quale collaborai nella pubblicazione di una sua grande opera, oggi assai rara, di difficile lettura, ma ricca ancor oggi e domani, di risultati non tutti ancora conosciuti (il *Formulario Matematico*, pubblicato in cinque volumi dal 1889 al 1908).

Il discorso di oggi mi avrebbe dato una soddisfazione assai maggiore se avessi potuto discutere con lui invece di contentarmi di averlo presente nella mia memoria. Ma i miei ascoltatori ne faranno le veci, se sarò riuscito a trasmettere loro qualcuna delle idee intorno alle quali ho studiato durante cinquant'anni.

L'argomento del mio discorso è duplice: esso si collega coi due discorsi precedenti.

Una prima parte è storica, ed è relativa allo sviluppo della logica matematica; la seconda parte è costruttiva e, se non mi inganno, porta un qualche contributo ad un problema che affatica da mezzo secolo i matematici ed in modo speciale i logici matematici: l'origine e l'essenza del concetto di numero intero.

Prima di cominciare a svolgere la prima parte, desidero accennare ad una antica definizione della matematica, data da Erone (*Opera*, IV, 162 dell'ed. di Heiberg):

«La matematica è una scienza teorica delle cose comprese dalla mente e dai sensi, le quali cadono nei suoi lacci. Qualcuno argutamente ed opportunamente ha detto della matematica ciò che Omero dice di Eris, la dea della discordia.

«Così la matematica comincia dal punto e dalla linea, ma poi la sua azione si estende al cielo, alla terra e a tutti gli enti dell'universo».

Il verso di Omero ricordato da Erone (*Iliade*, IV, v. 442-443) parlando della lotta fra Troiani e Greci li dice spinti da due iddii che dal cielo eccitano alla battaglia, da una parte Atena, dall'altra Are: «E v'era Spavento e Terrore (Φόβος e Δεῖμος, oggi sono i nomi di due satelliti di Marte) e con essi l'irrequieta Eris (la discordia), sorella e compagna del micidiale Marte, essa che piccola da principio, leva la cresta, ma poi punta nel cielo il suo capo,

mentre incede sulla terra».

## *I – Logica matematica e logica*

Nel 1900 si svolgevano a Parigi due congressi internazionali, uno di matematica ed uno di filosofia. In quei due congressi, ai quali partecipavo, ebbi occasione di conoscere Bertrand Russell, il quale aveva pubblicato allora un volume su Leibniz (tradotto più tardi in francese nel 1908). Io stesso già da più di un decennio avevo studiato gli scritti di Leibniz, e da questo studio era sorta la mia amicizia per Giuseppe Peano. Feci quindi da intermediario tra Peano e Russell, il quale era allora in relazione con Louis Couturat, un filosofo francese, travolto all'inizio della prima grande guerra da un camion, nel 1914. Meravigliai Couturat quando gli descrissi rapidamente la massa dei manoscritti inediti di logica matematica di Leibniz esistenti ad Hannover, che io avevo studiato colà nel 1899 e di cui avevo già dato alcuni saggi nella *Rivista di Matematica*, nel *Formulario* di Peano e nel *Bollettino di Storia della Matematica* del prof. Gino Loria. Il Couturat, dopo essersi allora recato a Hannover, con una missione del Governo francese, pubblicò un volume sulla logica del Leibniz, ed un grosso volume di frammenti inediti, Bertrand Russell, impadronitosi rapidamente del calcolo logico di Peano, pubblicò un primo saggio della sua *Algebra Universale* analizzando coi simboli di Peano, la teoria generale delle *Relazioni*, nella *Rivista Matematica* di Peano. Diede poi un enorme sviluppo a queste ricerche pubblicando

circa trentamila formule nei tre grandi volumi dei *Principia Mathematica*.

Fu in una seduta di quel congresso che L. Couturat propose di dare il nome di logistica a quella nuova scienza, divinata da Leibniz, una scienza che tanti scrittori avevano già cercato di costruire.

Giuseppe Peano si alzò allora accettando tale proposta, ma allo scopo di distinguere la *logica matematica*, che formava oggetto dei suoi studi e delle sue ricerche, dalla *logistica*, la quale si proponeva di studiare in modo più astratto ed autonomo i procedimenti della logica deduttiva indipendentemente dalle sue applicazioni matematiche.

Logistica è veramente il nome della scienza che Erone nelle sue definizioni (*Opera*, IV, p. 98-164) considera come una teoria delle cose numerate e non dei numeri in se stessi. Egli considera cioè ogni ente numerato o numerabile come un numero, e su questi enti opera come l'aritmetica, sui numeri. Appartiene a tale teoria il problema dei buoi di Archimede. La logistica secondo Erone considera le unità come indivisibili, come la più piccola moltitudine di quelle cose che sono con essa omogenee; così nel caso di moltitudine di uomini, un uomo è indivisibile; in una moltitudine di dramme, una dramma è indivisibile, anche se, come moneta, si possa suddividere in parti.

La logica matematica, secondo le idee di Giuseppe Peano, si

propone invece essenzialmente un problema di minimo, cioè il problema di formulare ed enunciare il più piccolo e più semplice sistema di nozioni di logica e di proposizioni logiche necessarie e sufficienti per rappresentare simbolicamente le verità matematiche e le loro dimostrazioni, cioè le loro connessioni e le leggi di derivazione le une dalle altre.

È vero che in lavori precedenti G. Peano aveva considerato talvolta la logica matematica come la soluzione del desiderato di Leibniz, cioè di una simbolistica universale atta ad esprimere in modo rigoroso qualunque ragionamento umano, riconducendolo a regole semplici come quelle dell'aritmetica e dell'algebra, in modo da rendere impossibili le controversie, sostituendo al verbo *discutiamo* il verbo *calcoliamo*. Questo ideale di Leibniz, da lui non raggiunto, come non è raggiunto da nessun logistico moderno non era stato nemmeno raggiunto da chi lo aveva ingenuamente espresso nel medioevo, da Raimondo Lullo, nella sua *Ars Magna*.

Le citazioni di Leibniz negli scritti di Giuseppe Peano sono limitate effettivamente alle applicazioni della logica alla matematica. Nei vent'anni da lui dedicati a questo studio (1888-1908) egli non si occupò mai di avvicinarsi a questo ideale, utopistico, della logistica.

La logistica, che appare nella sua forma più complessa moderna nella grande opera di Bertrand Russell e di A. N. Whitehead, negli studi della scuola tedesca di Hilbert, Ackermann, Gentzen, nei più astrusi ed intricati indirizzi di Skolem, Gödel, Carnap, Wittgstein, Waismann, E. T. Bell, nei paradossi di Brouwer, nelle ricerche, di Lusin, Moisl, anche in Italia ha trovato un'originale continuazione nelle ricerche di Annibale Pastore e di Pietro Mosso (*Logica del potenziamento*). La logistica procede direttamente dall'indirizzo di Ernest Schröder (1851-1902) il quale già nel 1877 in un opuscolo *Der Operationskreis der Logikkalkuls* e successivamente in tre ponderosi volumi intitolati *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890) ha sviluppato questa teoria. L'algoritmo di Schröder è complicato e non ebbe seguito. Più acuti sono gli studi di G. Frege, i quali però sono pure rimasti senza seguito soprattutto per le notazioni assai complicate, specie di disegni a due dimensioni, di difficile lettura, di più difficile esecuzione tipografica ed esigenti uno spazio assai ingombrante nella scrittura.

In realtà gli sviluppi della logistica hanno le loro origini ben più lontane di Leibniz. Questo filosofo infatti aveva una conoscenza approfondita degli sforzi compiuti dagli scolastici per completare ed approfondire le ricerche logiche di Aristotele. L'opera degli scolastici segna realmente un progresso. L'antipatia che essa ha destato nelle università e nelle scuole durante la riforma, nel periodo dell'illuminismo e più ancora in quella del

positivismo, dipende prevalentemente dal timore che questa dottrina possa essere un incoraggiamento ad accettare l'insegnamento teologico della scolastica.

Pure nelle distinzioni delle operazioni logiche di somma logica, prodotto logico, proposizioni negative, esistenziali, l'analisi degli scolastici è prolissa ma acuta. Una delle opere più interessanti è costituita dalle *Summulae logicales* di Pietro Hispano, più volte commentate e pubblicate in secoli successivi (una delle edizioni più moderne, Venezia, 1572).

Ma queste ricerche arenarono perchè mentre Aristotele aveva tratto la sua logica deduttiva specialmente dallo studio della matematica del suo tempo, gli scolastici la conoscevano poco e non sapevano applicare il calcolo logico ad altre proposizioni che a quelle adoperate nelle più banali espressioni della vita comune.

Un contemporaneo di Pietro Hispano, che fu poi Papa Giovanni XXI, che studiava nella stessa città di Viterbo, Campano da Novara, insoddisfatto della sistemazione data da Euclide all'aritmetica dei numeri interi, considerati da Euclide come casi particolari dei rapporti tra grandezze, tentava di formulare ed in sostanza vi era riuscito, un semplice sistema di postulati per l'aritmetica dei numeri interi, assai originale. Questo stesso sistema fu riscoperto in epoca recente da Mario Pieri. La fine del breve periodo di floridezza dello studio di Viterbo interrompe queste ricerche.

Ma già nel 1200 un'altra acuta osservazione era stata fatta da Leonardo Pisano nel suo *Liber Abaci* (edito da B. Boncompagni, Roma, 1857, p. 1). Nella, lettera introduttoria al maestro Michele Scotto egli dice: «Et quia arithmetica et geometria scientiae sunt connexae et suffragatoriae sibi ad invicem, non potest de numero completa tradi doctrina, nisi intersecantur geometrica quaedam vel ad geometriam spectantia quae hic tantum iuxta modum numeri operantur; qui modus est sumptus ex multis probationibus et demonstrationibus quae figuris geomericis fiunt».

Leonardo Pisano vede, un po' confusamente, che nell'aritmetica e nella geometria c'è qualcosa di comune e rinuncia all'idea di gerarchia o di precedenza dell'aritmetica sulla geometria o viceversa. Molto più tardi Leibniz (*Nouveaux Essais sur l'entendement humain*) vide un po' più chiaramente che le teorie del numero, dello spazio e del tempo erano collegate da uno stesso sistema di postulati, ripetuto tre volte in queste diverse scienze. Ma non seppe trarne la conclusione, implicitamente affermata da Peano e poi da Fladamard, come vedremo fra poco, che la compatibilità di questo sistema non esige nessuna prova, poichè essa ha una triplice conferma dallo sviluppo di queste tre scienze.

Appartengono invece non alla logica, ma alla logica matematica, o almeno le sono assai vicini, gli studi iniziati da Locke, sviluppati da Condillac nella sua *Langue des Calculs* ed applicati da

Lavoisier nel discorso preliminare del *Traité de Chimie*: «Comme ce sont les mots qui conservent les idées et les transmettent, il en résulte qu'on ne peut perfectionner le langage sans perfectionner la science, ni la science sans le langage».

La reazione romantica., intuizionista, in sostanza antiscientifica, è invece espressa da Lamartine in un opuscolo scritto verso il 1833, sull'avvenire della poesia: «J'abhorre les chiffres, cette négation de toute pensée... Les mathématiques étaient les chaînes de la pensée humaine. Je respire, elles sont brisées». Cfr. E. Picard, *La vie et l'oeuvre de Jules Tannery; Eloges et discours académiques*, Parigi, 1931, p. 79.

La logica matematica trae la sua origine dall'aritmetica astratta. Dopo l'aritmetica di Diofanto, del III secolo d. Cr., ed i successivi commenti di Bombelli (1572), Xilandro (1575) e A. Girard (1625), l'aritmetica assume uno straordinario sviluppo. Dopo le ricerche di P. Fermat, a cui seguono quelle di Eulero, Lagrange e Gauss, i matematici nel secolo XIX sono ormai in possesso di teoremi meravigliosi, assolutamente veri, dimostrati dopo sforzi secolari, e dipendenti soltanto dai semplicissimi principii che stanno a base dell'aritmetica. Ma qui sorgeva una nuova meraviglia; perchè questi teoremi aritmetici; tanto semplici nei loro enunciati, avevano bisogno di dimostrazioni così intricate e difficili?

Waring aveva appreso un teorema da Wilson: se  $a$  è un numero primo, allora  $(a-1)!+1$  è un multiplo di  $a$ . Waring diceva che la dimostrazione gli pareva difficile perchè non si conosceva nessuna notazione con la quale rappresentare i numeri primi. Il teorema fu dimostrato qualche anno dopo da Lagrange. Gauss a questo proposito nota opportunamente (*disq. Arithmeticae*, § 76) «Huiusmodi veritates *ex notionibus* potius quam *notationibus* hauriri debebant». Aveva ragione.

Però quando Gauss si trovò di fronte ai teoremi difficili relativi ai residui biquadratici, vide che questi teoremi soltanto risplendono di una genuina bellezza e di una somma semplicità, quando il campo dell'aritmetica si estende alle quantità immaginarie, cioè ai numeri che egli chiama «numeri interi complessi». Egli osserva (*Werke*, II, p. 171): «Il matematico astrae interamente dalla costituzione degli oggetti e dal contenuto delle loro relazioni; egli tratta soltanto della numerazione e della comparazione delle relazioni che esistono tra loro».

Poco dopo Poincaré ribadiva questo concetto estendendolo ancora ed applicandolo nella sua *Introduction à la théorie des nombres* (Journ. de Liouville, X, 1845, p. 5): «Les principes généraux de l'analyse mathématique ont leur source naturelle dans la simple considération de l'ordre ou de la disposition mutuelle qu'on peut observer actuellement entre plusieurs objets; ce qui me paraît le plus haut point d'abstraction et de généralité où il soit permis de porter la science».

Da Gauss a Dirichlet, da questi a Dedekind, da Dedekind a Genocchi, un acuto e profondo matematico il quale sebbene da vivo sia stato apprezzato ed onorato come presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, ora è piuttosto dimenticato, da Genocchi a Peano, si assiste ad una catena ininterrotta di sforzi.

Gli scrittori di teoria dei numeri fin qui nominati, sono stati seguiti da molti altri. Cito soltanto uno degli ultimi, Edmondo Landau, il quale ha scritto in simboli, non molto diversi nella sostanza dal sistema di Peano, più di un migliaio di teoremi aritmetici, corredati dalle loro dimostrazioni. È uno sforzo che segue, in una direzione vicina, quello dovuto alla scuola di G. Peano, la quale giunse in una decina d'anni a scrivere in simboli, completamente, molte migliaia di teoremi aritmetici, geometrici e meccanici, con un migliaio di dimostrazioni. Lo spazio occupato dagli enunciati dei teoremi è spesso molto più breve dei soli titoli delle memorie che li contengono.

Uno degli sforzi più costanti, più urgenti, dei matematici moderni è quello di semplificare, ordinare, ciò che sappiamo con sicurezza; ridurre al minimo, a poche idee, chiare, semplici e precise, l'esposizione generale della matematica.

È uno sforzo continuo, è la meta che si sono prefissi i matematici da Euclide ad Archimede, da Newton a Lagrange.

Questo sforzo è ormai necessario per rendere accessibile la massa enorme di pubblicazioni, di studi e di ricerche, che con

varie notazioni, nelle varie lingue del mondo, si stanno accumulando in modo tale da non poter essere più oltre abbracciati ed utilizzati dalle generazioni future.

Ma quest'opera di coordinamento e semplificazione è potentemente aiutata da una continua e serrata analisi dei principi fondamentali. Allora soltanto molte nozioni intermedie appaiono secondarie o inutili. Molte ricerche sono complicate soltanto perchè il punto di partenza non è scelto opportunamente. Molti risultati del calcolo delle variazioni e del calcolo funzionale più generale appaiono semplici quando i principii sono stati scelti con cura: molte ricerche faticose diventano antichate ed inutili.

Desidero dare qui un semplicissimo esempio di qualche modificazione che può rendere più ovvii ed accettabili i postulati dell'aritmetica elementare.

## *II – Sui postulati dell'aritmetica e la loro compatibilità*

I postulati dell'aritmetica dei numeri interi, enunciati per la prima volta da Giuseppe Peano negli *Arithmetices Principia* (Torino, 1889) sono stati estratti, come egli dice, dalla profonda e sottile, ma piuttosto involuta, analisi di R. Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*) pubblicata nel 1888<sup>5</sup>.

Essi sono stati oggetto di numerose indagini da G. Peano stesso, l'ultima delle quali risale al 1908 (Riv. di Mat., Torino, vol. VIII), rivolte a dimostrarne l'indipendenza. Sottili critiche in

---

<sup>5</sup> Versione italiana di O. Zariski, Roma, 1926. Lo scritto presente può considerarsi come un secondo tentativo, dopo quello di G. Peano, di estrarre una teoria semplice dal complesso edificio logico matematico di Dedekind. G. Peano deriva da Genocchi e Dedekind, questi due da Gauss. Il concetto di *Classe* (Cls) è di Eulero, sviluppato da Gauss. Il nome *classe* è adoperato comunemente nella teoria dei numeri e dallo stesso Dedekind nell'opera citata n. 34 (pag. 41 dell'edizione italiana) e già (pag. 127-133 dell'edizione italiana) nel paragrafo 1 dell'altro lavoro di Dedekind dal 1872. Il nome *sistema* che Dedekind preferisce, è più vago e meno usato. Il nome *ensemble*, *insieme*, oggi spesso usato, è adoperato in vari sensi.

forme diverse sono state esposte intorno ad essi da Mario Pieri, Alessandro Padoa, C. Burali-Forti, H. Poincaré, B. Russell, D. Hilbert ed altri.

Nell'ultima esposizione sopracitata, G. Peano ha risolutamente affermato che non è necessario dimostrare la *compatibilità*, ossia *non contraddizione*, dei postulati aritmetici, e recentemente J. Hadamard<sup>6</sup> in acute osservazioni su questo argomento, accettò

---

<sup>6</sup> J. HADAMARD nella nuova *Encyclopédie Française*, vol. I (1.52.2), *Mathématique et physique*) scrive: «La logique déductive... relève en réalité de la méthode mathématique. Les logisticiens contemporains ont repris, sous ce point de vue, la construction encore imparfaite d'Aristote; ils se sont appliqués à constituer un système de symboles analogues aux symboles mathématiques et susceptibles de présenter, par leurs combinaisons, tout le raisonnement déductif.

«Sous l'impulsion du grand mathématicien Hilbert, cette branche de la science a acquis, dans ces dernières années, une large extension et une extraordinaire audace».

Ma Hadamard conclude che il tentativo non è riuscito a dimostrare la compatibilità degli «assiomes de l'arithmétique» di Peano. Egli dice (1.52.14; doc. cit.): «Le système de Peano devait être formé tel qu'il l'a été et reste la base logique de l'arithmétique. Le tort des logisticiens n'est pas de n'avoir pas démontré la

interamente questo punto di vista, dichiarando vana a priori, tale ricerca.

In tempi recenti, dopo nuovi sforzi per dimostrare un non so che di vago e di insufficiente in questo sistema di postulati, qualcuno ha tentato di far apparire tale insufficienza, come proveniente da un'insufficienza dei principii di logica comunemente accettati.

Federico Enriques<sup>7</sup> ha rilevato che G. Peano «assimila la fondazione dell'aritmetica secondo il criterio di M. Pasch. Ma tale assimilazione ha qualcosa di urtante... che cosa siamo invitati a vedere con la nostra immaginazione, dietro il simbolo non definito del numero? Ogni tentativo in questo senso ci porta a realizzare, per così dire, in un mondo intelligibile, non i numeri, bensì oggetti o classi di oggetti di cui i numeri esprimono dei rapporti logici...». E successivamente egli tenta una interpretazione di questi postulati che credo di esser riuscito a precisare nella ricerca che segue.

---

compatibilité de ce système, mais d'avoir tenté cette démonstration».

<sup>7</sup> F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. I, 3<sup>a</sup> ediz., Bologna, 1924; p. 236.

Consideriamo anzitutto zero (0) come un numero. Osserviamo poi che l'eguaglianza  $3 + 5 = 8$  ci permette di considerare l'operazione  $+$  come una operazione o funzione di due variabili. Eseguita sulla coppia 3 e 5 dà 8 per risultato.

Ma come fu osservato da Clifford, possiamo interpretare la stessa eguaglianza come esprime il risultato di una operazione ripetuta, dipendente da una sola variabile, leggerla cioè così:

L'operazione  $+$  eseguita 5 volte sul numero 3 dà per risultato il numero 8. L'operazione  $+$  in questo secondo senso si chiama anche «*il successivo di*».

Infine indicheremo con Peano con  $N_0$  la classe dei numeri interi positivi o nulli che si vuol definire per mezzo delle sue proprietà.

G. Peano per la prima volta ridusse a cinque i postulati dell'aritmetica. Li formulò poi successivamente con un sistema di sei postulati relativi ai tre enti 0,  $+$ ,  $N_0$ .

Le sei proposizioni sono le seguenti:

1. *numero* è una classe; 2. *Zero* è un *numero*; 3. *il successivo di* ogni numero è un *numero*; 4. Se il numero *zero* soddisfa una certa proprietà, e se si ammette che questa proprietà sia vera per un numero  $x$ , essa, è ancor vera per il successivo di  $x$ , tale proprietà è vera per tutti i numeri (*principio d'induzione*); 5. *Zero* non è il successivo di alcun numero; 6. Se due numeri hanno i loro successivi eguali, sono anche essi eguali fra loro.

Questi sei postulati si possono semplificare alquanto, introducendo due definizioni intermedie.

Chiamò *catena* (nozione che corrisponde alla *Kette* di Dedekind)<sup>8</sup> ogni classe la quale contenga *zero* tra i suoi elementi, e se contiene un elemento, contenga anche il suo successivo.

Allora si possono enunciare questi due postulati: 1. *Numero* è una catena; 2. Ogni *catena* contiene tutti i *numeri* (questa è un'altra forma del principio di induzione). Con questi postulati (che corrispondono ai postulati 1-4 di Peano) si possono definire per induzione le operazioni dirette di somma, prodotto e potenza e varie loro proprietà.

Conviene però definire subito la *classe dei numeri compresi tra lo zero ed un qualsivoglia numero  $a$* , intendendo che, se  $a = 0$ , tale classe comprende l'unico individuo *zero*; e che tale classe relativa al *successivo* di  $a$ , comprende oltre i numeri compresi fra zero ed  $a$ , anche il successivo di  $a$ .

Conviene ora enunciare il terzo postulato.

3. Se  $a$  è un numero, il suo successivo non appartiene alla

---

<sup>8</sup> Effettivamente la *Kette* di Dedekind è un ente più limitato. Nel suo volume *Was sind und was sollen die Zahlen*, *catena* è soltanto l'insieme dei numeri interi maggiori di un numero dato  $a$ . L'ente qui definito è assai più astratto ed ampio. Esso occorre in successive estensioni della nozione di *numero intero a più unità*, ecc.

classe dei numeri compresi tra zero ed  $a$ . Questo postulato terzo comprende i postulati 5° e 6° di Peano, come si dimostra facilmente. Infatti il 5° postulato di Peano è un caso particolare del nuovo postulato 3°. Il postulato 6° di Peano consegue pure da esso. Infatti se due numeri,  $a$ ,  $b$  hanno eguali i loro successivi senza essere eguali fra loro, allora il successivo di uno di essi è compreso nella classe compresa tra *zero* e l'altro di essi; ma poichè esso è eguale al successivo dell'altro, il successivo di quest'ultimo sarebbe compreso tra lo zero e quest'ultimo, ciò che contraddice al nuovo postulato 3°.

Con questo ordinamento si possono definire le relazioni di diseuguaglianza tra due numeri e le loro principali proprietà, il che presenta un interesse nella successione delle proposizioni relative espresse con simboli del calcolo logico<sup>9</sup>.

Ma assai più importante è l'osservazione che questa nuova forma di postulati dell'aritmetica ci permette di dar loro un significato assai semplice ed intuitivo in modo tale da renderne evidente la compatibilità.

---

<sup>9</sup> Le relazioni di diseuguaglianza sono definite nel formulario di G. Peano per mezzo della somma; le dimostrazioni delle loro proprietà esigono però il ricorso al principio di induzione. Una definizione diretta conduce un po' più rapidamente allo scopo.

Possiamo anzi aggiungere che effettivamente in questi tre postulati compaiono due sole idee primitive, *zero* e *successivo*.

*Numero* è la classe definita dai tre postulati 1°, 2° e 3°, i quali ne formano la *definizione*. Ciò è stato acutamente osservato in modo implicito da Dedekind<sup>10</sup> e riconosciuto da Peano<sup>11</sup>. Ma i postulati stessi<sup>12</sup> definiscono i numeri come una catena illimitata

---

<sup>10</sup> DEDEKIND, *Was sind*, etc. 1. c.

<sup>11</sup> G. PEANO, Form. II, § 2, *Arithmetique*, p. 2, Torino 1898.

<sup>12</sup> F. ENRIQUES si è avvicinato a questa interpretazione ma non ne ha analizzato forse a sufficienza il valore. Vedi F. ENRIQUES, *Quest. riguard. le matematiche elementari*, vol. 1, 3ª ed., Bologna, 1924; *I numeri reali*, p. 269: «Serie numerata è una serie bene ordinata (di cui ogni parte ha un primo elemento) soddisfacente al principio di induzione» e poco prima aveva osservato (p. 236): «Peano assimila la fondazione nell'aritmetica alla fondazione della geometria secondo il criterio di M. Pasch. Ma tale assimilazione ha qualcosa di urtante. Che cosa siamo invitati a vedere colla nostra immaginazione dietro il simbolo non definito del numero? Ogni tentativo in questo senso ci porta a realizzare, per così dire, in un mondo intelligibile, non i numeri, bensì oggetti o classi d'oggetti di cui i numeri esprimono dei rapporti logici...».

(post. 1°), unica (post. 2°) ed aperta<sup>13</sup> (post. 3°).

L'esistenza di questa *catena* appare evidente all'intuizione topologica delle catene *reali* che possiamo immaginare nello spazio. L'aritmetica si presenta così come la *astrazione* più semplice ed elementare della nozione di *catena illimitata, unica ed aperta*.

Elementi di una tale *catena* sono i suoi *anelli*. Il primo di questi anelli (*zero*) è legato soltanto con un altro, il suo successivo. Ogni altro anello ha un successivo ed un *precedente*, ossia un anello di cui esso è il successivo<sup>14</sup>. Il terzo postulato appare allora evidente. Se la catena si chiude ci dev'essere un anello collegato ad altri tre

---

<sup>13</sup> Il postulato 5° di Peano dice che la catena non forma un *anello chiuso*, il postulato 6° che non forma nemmeno un anello chiuso dotato di una appendice di cui lo zero è l'ultimo anello (ossia il primo anello esterno).

<sup>14</sup> Gli antichi hanno considerato relativamente poco le *catene* e i loro *anelli*. Il nome δεσμός corrisponde non soltanto al concetto di *catena* (più spesso limitato alla catena delle *ancore* delle *navi*, Omero, Odissea, XIII, 1000) ma anche a quello di *rete* (la *rete di Vulcano*, Omero, Odissea) che include una rete di anelli a connessione multipla, suggerita dalle corazze formate di anelli legati in modo da formare un tessuto. Queste reti meritano ancor oggi uno studio topologico, appena intuito in pochi casi semplici.

contro il supposto. Se si legasse al primo, questo legherebbe due anelli contro il supposto.

Questa nozione topologica non esige che pochi concetti relativi a quella geometria generale che Eulero ha rettamente chiamato *analysis situs* o *geometria di situazione*<sup>15</sup>.

Appare così fin dai primi principii quale sia l'intimo legame tra questa nuova scienza, la *topologia* e l'*aritmetica* pura<sup>16</sup>. Un vago

---

<sup>15</sup> *Analysis situs* è un nome ideato a Leibniz in altro senso. Nel senso qui indicato appare forse per la prima volta in Eulero, *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis* (Mem. de l'Acad. des Sc. de Berlin, 1759) ed ha dato luogo ad alcuni interessanti studi di Vandermonde.

<sup>16</sup> La posizione singolare data all'*Aritmetica* degli elementi di Euclide, mentre da una parte è contraria all'origine storica dell'aritmetica, la quale precede certamente di molti secoli la geometria, corrisponde al desiderio di porre in luce il legame intimo che unisce aritmetica e geometria. I tentativi moderni di considerare la teoria delle grandezze come premessa all'aritmetica, rispondono allo stesso desiderio di Euclide, ma sono eccessivamente complicati e non soddisfacenti. La più rigida applicazione di questo modo di esporre l'aritmetica è stato dato da C. Burali-Forti. Sono soggetti alla stessa critica i quattordici postulati re-

bagliore di questa relazione appare forse già nei commentatori di Euclide (e forse negli antichi Pitagorici) nella distinzione tra  $\mu\omicron\gamma\acute{\alpha}\varsigma$  ed  $\acute{\epsilon}\nu$ <sup>17</sup>. Questo è il primo numero, *uno*. Il concetto di *monade* sembra alludere alla proprietà che essa ha di formare o comporre i numeri (*successivo*).

---

centemente studiati da A. Padoa, posti a base dei numeri complessi, di cui i numeri interi diventano un caso particolare. Il legame ora qui rilevato tra topologia ed aritmetica lascia intravedere una nuova condizione a cui potrebbero essere sottoposti gli esempi scelti per dimostrare l'indipendenza di un gruppo di proposizioni primitive poste a base di una teoria. Essi dovrebbero cioè essere l'espressione di una intuizione derivata dall'esperienza plurisecolare e generale, che nel caso dell'aritmetica è continuata senza interruzioni da Pitagora a noi. È qui il caso di applicare la famosa regola di credibilità di S. Vincenzo da Lirino, il quale consigliava di credere ciò che *semper, ubique, ab omnibus creditum est*.

<sup>17</sup> TEONE, *Arithm.*, ed Dupuis, n. 32. Archita e Filolao adoperano indifferentemente le parole monade ed uno.

Una differenza espressa in modo involuto è invece rilevata nel *Filebo* di Platone.

Ma l'astrazione limitata alla contemplazione delle catene lineari è una scienza ben povera e limitata.

Già i primi Pitagorici videro chiaramente che i numeri potevano bastare a *rappresentare* fatti ed osservazioni geometriche più sottili ed importanti. Essi cominciarono subito a studiare le relazioni tra la successione dei numeri interi ed i numeri triangolari, tra la successione dei numeri dispari ed i numeri quadrati, e così via contemplarono numeri poligonalι, piramidali, oblungi etc.

Questi nuovi enti artificiosi, se considerati come enti puramente aritmetici, appaiono invece semplici e intuitivi considerati nel campo geometrico, o più esattamente nel campo *topologico*, poichè le proprietà che in essi si considerano non sono metriche, nè sono relative alla forma, ma soltanto alla posizione mutua delle loro singole parti.

La meraviglia dei primi matematici (Gauss, Listing, Möbius, etc.) che scopersero le prime relazioni tra topologia ed analisi si sono venute sempre più sviluppando negli ultimi decenni e sono destinate ad assumere una maggiore importanza in avvenire.

La meraviglia cessa quando si pensi che la complicazione dei teoremi puramente aritmetici è intricata quando essi rappresentano proprietà di enti geometrici a più dimensioni, rappresentati per mezzo di una successione lineare ad una sola dimensione, la quale corrisponde probabilmente ad una necessità della costituzione della mente umana.

L'analisi precedente è stata ottenuta per mezzo della notazione simbolica del Formulario di G. Peano, la quale permette di isolare meglio il valore delle nozioni considerate. Eccone un breve riassunto<sup>18</sup>.

### Definizione di *catena* (*illimitata*)

Idee primitive 0, +. Esse compaiono nella definizione seguente di catena:

$$s \in C_0 . \equiv : s \in Cls . 0 \in s : a \in s . \supset a + \in s$$

Scriviamo  $C_0$  invece di catena illimitata, ossia di classe che comprende 0 tra i suoi elementi e nella quale ad ogni elemento  $a$  segue l'elemento successivo, indicato con  $a +$ .

---

<sup>18</sup> Le notazioni di Frege sono ingombranti. Quelle di Burali-Forti, Padoa, Russell, Hilbert, derivano da quelle di Peano. Pure ingombranti e di difficile lettura, perchè si distaccano notevolmente dall'uso comune dei matematici, sono le notazioni di Lukasiewicz e dei suoi discepoli. Queste notazioni sono esposte in: M. BOCHENSKI, *Nove lezioni di logica simbolica*, Roma, 1938. Il P. Bochenski, già professore di logica all'Angelicum di Roma, insegna ora nell'Università di Friburgo.

Definizione di *numero* (*intero, positivo o nullo*)

Esso è definito per mezzo dei tre postulati seguenti:

$$N_0 \in C_0 \quad (\text{postulato I})$$

$$s \in C_0 \text{ e } a \in N_0 \Rightarrow s \in C_0 \quad (\text{postulato II})$$

Definizione di intervallo

$$0 \dots 0 = \iota 0.$$

$$a \in N_0 \text{ e } 0 \dots (a+) = 0 \dots a \cup \iota 0$$

Cioè: con  $0 \dots a$  si indica la classe dei numeri interi compresi

tra 0 ed  $a$ , estremi inclusi<sup>19</sup>. È qui definita per induzione<sup>20</sup>. Possiamo ora enunciare:

---

<sup>19</sup> Compare qui il simbolo  $t0$  classe degli elementi eguali a 0 formata cioè da un unico individuo. Già Leibniz, nei *Nouveaux Essais* (ed. Raspe, p. 453) aveva intravisto che si possono considerare classi formate da un solo individuo, allo scopo di permettere di comprendere le preposizioni singolari tra le universali: egli dice: «Car quoiqu'il soit vrai qu'il n'y a qu'un seul St. Pierre Apôtre on peut pourtant dire que *quiconque a été St. Pierre l'Apôtre* a renié son maître. Ainsi le syllogisme:

St. Pierre a renié son maître

St. Pierre a été disciple

donc quelque disciple a renié son maître

est de la forme *darapti*». Questo sillogismo contiene in tal forma, due proposizioni universali, affermative. Leibniz però non ha saputo spingere più oltre questa analisi. Due secoli dopo, Dedekind, senza conoscere Leibniz, ha nuovamente veduto la necessità di distinguere un individuo dalla classe degli individui ad esso uguali; ma non ha introdotto nessun simbolo per indicare questa classe nel suo calcolo logico.

Si deve a Giuseppe Peano l'introduzione del simbolo  $t$  per indicare questa classe, e l'osservazione che per mezzo di esso si può eliminare il simbolo  $\varepsilon$ ; cioè se  $a$  è una Classe, allora  $x \varepsilon a \equiv$ .

---

$\iota \propto \supset a$  ma il simbolo  $\iota$  si stacca dall'uso comune dei matematici e dei logici, quindi conviene conservare entrambi questi simboli nell'uso matematico.

<sup>20</sup> Questa classe, ovvero intervallo dei numeri interi compresi tra zero ed  $a$ , è stata studiata da Dedekind nel suo scritto *Was sind und was sollen die Zahlen* § 98. Dedekind indica questa classe col simbolo  $Z_a$  ( $Z$  è l'iniziale della parola tedesca *Zahl*); egli la definisce per mezzo delle idee  $<$ ,  $\leq$ . È più semplice definirla per induzione, come io ho fatto qui per la prima volta, analogamente a quanto aveva fatto H. Grassmann per l'addizione e la moltiplicazione.

Per mezzo della nozione intervallo  $0 \cdots a$  si definisce invece assai facilmente la relazione  $\leq$ . Se  $a, b$ , sono due numeri, allora:  $a \leq b$  significa  $0 \cdots a \supset 0 \cdots b$  come è stato fatto nel Formulario di Peano.

Si noti che si potrebbe ora introdurre un nuovo postulato III: esiste un numero  $M$  tale che il successivo di  $M$  è eguale a zero. Questo numero  $M$  si può chiamare modulo. Si ha allora un'aritmetica che si può chiamare ciclica, la quale coincide con la teoria delle congruenze di Gauss. Il segno  $\equiv$  di Gauss, coincide allora con l'ordinario simbolo  $=$ . In questa aritmetica la serie dei numeri è ancora illimitata, ma ha un massimo e un minimo, cioè

$$\forall a \in \mathbb{N}_0. \exists a' \in \mathbb{N}_0. a' \neq a \text{ e } a' > a \quad (\text{postulato III})$$

Cioè: il successivo di  $a$  non appartiene all'intervallo  $0 \dots a$ .

Il postulato III comprende come caso particolare, il postulato 5° di Peano:  $a + 0 = a$ .

Il postulato 6° di Peano:

$$a, b \in \mathbb{N}_0. a + b = b + a. \exists a' \in \mathbb{N}_0. a' \neq a \text{ e } a' > a$$

enuncia una proprietà della operazione  $+$ , cioè che se due numeri hanno i successivi eguali essi sono eguali. Si dimostra per assurdo, così:

Se, data l'ipotesi non è  $a=b$ , allora  $a \in \mathbb{N}_0. a' \neq a \text{ e } a' > a$ , ovvero  $b \in \mathbb{N}_0. b' \neq b \text{ e } b' > b$  (2).

(Questa proprietà si dimostra per mezzo del principio d'induzione (postulato II). Essa non è che una forma diversa della proposizione: se  $a, b$  sono due numeri,  $a < b$ , ovvero  $a > b$ , ovvero  $a=b$ ).

Ma poichè per ipotesi  $a \neq b$ , posso nella (2), permutare

zero ed il modulo  $M$ . Esiste allora soltanto un numero finito di numeri primi, cioè di numeri primi compresi tra zero ed  $M$ .

L'aritmetica ciclica non è però la nostra aritmetica. Nella nostra aritmetica vale invece il postulato III che segue, enunciato nel testo.

$a +$  con  $b +$  ed allora la (1) si dice che  $a + \in 0 \cdots a$ , ovvero  $b + \in 0 \cdots b$  e questa conseguenza contraddice al postulato III.

I tre postulati definiscono la classe  $N_0$ . Essi sono indipendenti tra loro. Infatti il secondo postulato non è soddisfatto se per  $N_0$  intendo una coppia di catene indipendenti tra loro, per esempio  $N_0 \cup (N_0 + \sqrt{2})$  mentre è vero il primo, poichè  $N_0 \cup (N_0 + \sqrt{2}) \in C_0$  il terzo postulato non è soddisfatto se per  $N_0$  intendo la classe  $0 \cdots 3$  e se pongo  $3 + = 0$ , mentre rimangono veri i primi due.

Questi tre postulati per la loro semplicità e per l'ovvio significato concreto potrebbero essere introdotti nelle ordinarie esposizioni dell'aritmetica elementare.

## Appendice

Le tre letture precedenti furono seguite da interessanti discussioni a cui parteciparono numerosi studiosi. Sono qui riprodotte soltanto alcune delle osservazioni mosse da alcuni di essi, non tanto per riprodurre le discussioni di varia indole che allora ebbero luogo, ma per suggerire ai lettori che non vi parteciparono, punti di partenza per varie riflessioni che potranno essere di utile complemento alle idee qui svolte.

Osservo soltanto che nella discussione che seguì la terza lettura nell'Istituto di Alta Matematica sulla R. Università di Roma il prof. Luigi Fantappiè manifestò il suo compiacimento per il risultato raggiunto nell'analisi della idea di numero intero, ed il prof. A. Perna espresse l'opinione che il sistema delle due idee primitive e dei tre postulati che definiscono il numero sembra suscettibile di essere introdotto, per la sua semplicità, nell'insegnamento elementare.

Aggiungo in fine che i postulati dell'aritmetica sono sufficienti per poter definire con ogni rigore i numeri negativi, i numeri razionali e gli irrazionali. Non occorre nell'analisi pura introdurre il postulato della continuità (che occorre invece nell'analisi dei postulati geometrici).

Dedekind, fin dal 1872, ha chiarito questo punto. Si presen-

tano, a prima vista abbastanza naturalmente, nuove idee primitive e nuovi postulati, quando si vogliano introdurre i concetti di numeri complessi e poi di quaternioni. Si introduce allora dapprima « $i$ », l'unità immaginaria, come una nuova idea primitiva, e si aggiungono come postulati le regole di addizione e di moltiplicazione, cioè:  $i^2 = -1$ , etc. Se si introducono analogamente tre unità « $i$ ,  $j$ ,  $k$ » si hanno i quaternioni. Così ha fatto Hamilton nel 1845, e più generalmente sono state studiate in tal modo le varie *Algebre* ad  $n$  unità.

Ma tale metodo è sembrato ed è realmente artificioso ed anche un po' tortuoso. Come spero di dimostrare in altra occasione, a questo stesso metodo si è condotti allorchè si cerca di stabilire un sistema di postulati per la *topologia* delle *reti* o dei sistemi di punti dello spazio, collegati da linee.

Ma esiste invece un metodo più potente, più semplice e naturale, che non esige alcun nuovo postulato, nè alcuna idea primitiva.

Esso consiste nella definizione come operazioni delle *sostituzioni*. Esse si sono presentate per la prima volta a Lagrange, il quale ne ha dimostrato le prime proprietà, seguito ben presto da Gauss, da Ruffini, da Cauchy, da Abel e da Galois, più di un secolo fa.

Se si definisce un numero immaginario « $i$ » come una particolare sostituzione lineare che eseguita sopra una coppia di numeri

$(x, y)$  la trasforma nella coppia  $(-y, x)$ , tutte le proprietà dei numeri complessi sono conseguenze naturali e quasi intuitive della teoria delle sostituzioni. Questa teoria, che forma una delle più grandi conquiste della matematica dell'ultimo secolo, ha permesso di dissipare i dubbi e le incertezze che da Bombelli e da Cardano in poi avevano preoccupato i matematici, ed ha condotto a dimostrazioni chiare ed evidenti della impossibilità della risoluzione algebrica delle equazioni di grado superiore al quarto e di altri teoremi ancor più singolari e sorprendenti. Ed altri ancora seguiranno in avvenire, poichè in sostanza la teoria delle sostituzioni permette di porre in luce, nel modo più naturale, le intime relazioni che intercedono tra la topologia e l'analisi.

## DISCUSSIONE

seguita alla conferenza «Perchè la scienza non si è sviluppata in Cina», tenuta il 25 Aprile 1945 al Centro di Sintesi Scientifica, in Roma. Hanno partecipato alla discussione: il Prof. A. C. Blanc, ins. di Etnologia nella R. Università di Roma, il Prof. G. Bonarelli, Presidente della Soc. Geologica Italiana, il Prof. P. Mingazzini, ord. di Archeologia nella R. Università di Genova, ed il gen. ing. G. Rabbeno.

A. C. BLANC: *L'interessantissima relazione del prof. Vacca si basa, mi sembra, su due proposizioni fondamentali: 1) sull'affermazione di una sostanziale costanza, nel tempo e nello spazio, dell'intelligenza umana; 2) che il progresso scientifico è condizionato da fattori geografici, cioè che ogni scoperta, essendo strettamente concatenata con sforzi precedenti, continuati attraverso i secoli, si realizza il maggiore progresso soltanto nelle regioni ove il risultato di tali sforzi precedenti ha avuto agio di trasmettersi con continuità di generazione in generazione.*

*Entrambe queste affermazioni meritano qualche commento.*

*Anzitutto l'asserto che «la vita intellettuale dei popoli preistorici più antichi non era forse meno complessa di quella delle civiltà successive» esige un chiarimento. Se per «popoli preistorici più antichi» il prof. Vacca intende gli Homo sapiens fossili (i Fanerantropi fossili di Sergio Sergi), concordo pienamente con lui, specie se si considera il Paleolitico superiore avanzato*

*(Aurignaziano superiore e Maddaleniano).*

*Non dobbiamo però dimenticare che tale stadio è il coronamento di una lunga storia precedente, svoltasi per varie centinaia di millenni, e di un progresso nell'attività intellettuale di cui la paleontologia più antica ci fornisce palesi testimonianze. La costanza delle tecniche di scheggiatura nel Paleolitico inferiore, ad esempio, mantetutesi identiche per lunghe serie di millenni, indica chiaramente una funzionalità rudimentale dell'intelligenza, una prevalenza assoluta della tradizione sull'innovazione, un'assenza di fantasia inventiva che ci sorprende e ci sconcerta. L'intelligenza umana si è dunque evoluta, sviluppata, arricchita; e questo processo, credo, almeno in alcune regioni geografiche privilegiate, non è esaurito, ma in atto.*

*D'altra parte l'accertata antichissima età del costume della caccia delle teste, del cannibalismo rituale, ecc. mostra che fin dai primordi, l'uomo era un mistico, credente in forze soprannaturali e in una sopravvivenza oltretomba. (Vedasi BLANC A. C., Il sacro presso i primitivi, Roma, 1945). Ciò indica però che le reazioni istintive e le funzioni mentali dell'uomo sono singolarmente costanti nel tempo e nello spazio, non la sua intelligenza. Possiamo bensì dire che i progressi fondamentali dell'attività intellettuale si sono compiuti in età assai remota, molto prima che si iniziassero i tempi «storici», cosicchè nel Paleolitico superiore avanzato abbiamo manifestazioni di intelligenza certamente paragonabili a quelle dell'umanità vivente.*

*Il prof. Vacca attribuisce giustamente la limitazione al progredire del sapere nelle varie razze umane anzitutto alla variabile capacità di attenzione, di curiosità e di desiderio di sapere, attitudine variabile non solo da*

*individuo a individuo, ma da popolo a popolo, e che, esercitandosi per generazioni, può svilupparsi ed in breve tempo accrescersi, ma può anche affievolirsi rapidamente e ricondurre i popoli alla barbarie. Ora, vorrei sottolineare che gli esempi addotti dal prof. Vacca, di popoli barbari rapidamente sorti a grandi altezze (Macedoni, Romani, Anglosassoni, Giapponesi) contemplano tutti popoli localizzati nell'Eurasia centro-meridionale, o che da tali popoli hanno attinto i fermenti culturali per il loro progresso (come ad esempio i Giapponesi al loro primo contatto con la civiltà cinese, e gli Anglosassoni al contatto con il Rinascimento continentale). Non credo che le considerazioni del prof. Vacca possano invece estendersi ai «primitivi», specie se si considerino quelli localizzati nelle regioni periferiche più esterne rispetto al centro genetico dell'Eurasia centro-meridionale (Eschimesi, Fuegini) o isolati nelle foreste equatoriali (Pigmei) o in certe isole (Andamanesi). In questi popoli la riduzione progressiva della variabilità ha così profondamente inciso sulla loro funzionalità intellettuale, che essi sembrano aver definitivamente perduto la capacità di elevarsi culturalmente fino a raggiungere stadii paragonabili a quei dei popoli «civili». Lo dimostra l'inanità degli sforzi compiuti dai missionari, i quali, se riescono con relativa facilità a farne dei buoni cristiani, agevolati in ciò dalla naturale disposizione di quei popoli alla solidarietà sociale ed a un'etica elevata, non sono mai riusciti a farne popoli compiutamente civili. Tra questi casi estremi ed i popoli del centro genetico esistono naturalmente tutti i casi intermedi, per cui alcuni «primitivi» possiedono una certa capacità, che rimane purtuttavia sempre parziale, di assimilare le civiltà superiori.*

*L'affermazione del prof. Vacca che il progresso scientifico, e in genere*

*culturale, sia potentemente condizionato da fattori geografici, trova nella preistoria una piena conferma: non solo, ma si può dire che i fattori geografici che hanno condizionato il progresso scientifico europeo nei tempi storici erano già operanti fin da tempi remotissimi, cosicchè il processo di elevazione compiutosi nei tempi storici appare la continuazione ed il coronamento di uno sviluppo che si approfonda nel passato più antico.*

*La potenzialità genetica, ossia inventiva nel campo culturale, è stata sempre più elevata nell'Eurasia centro-meridionale, ed in specie nella sua parte occidentale: ogni progresso, rifluendo di generazione in generazione, ha costituito la premessa necessaria per i progressi successivi. Da questo sviluppo sono invece rimasti avulsi i popoli distaccatisi dal centro genetico dell'Eurasia centro meridionale nel corso dei tempi, i quali, nel loro isolamento, non hanno potuto tempestivamente fruire dei contatti con i popoli avviati sulla via dell'ascesa culturale, onde, richiusi su sè stessi, in ambienti spesso di tipo particolare ed estremo, si sono sempre più specializzati ed involuti, depauperandosi senza arricchirsi. Per molti di essi, ormai, non è più possibile riprendere l'ascesa. La ineluttabile irreversibilità dell'evoluzione li condanna ad una incapacità organica di assimilare i progressi culturali dei popoli civili, se non nella sfera etico-religiosa (nella quale del resto essi possono, per naturale inclinazione, dare dei punti ai loro «civilizzatori»), anche quando con questi vengano in intimo e prolungato contatto.*

*L'aver posto l'accento sulla importanza dei fattori geografici nello sviluppo culturale dell'umanità mi sembra uno degli aspetti più utili e significativi della bella relazione del prof. Vacca.*

G. VACCA: Il Prof. A. C. Blanc ha giustamente osservato che le mie considerazioni si applicano principalmente all'*Homo sapiens* (Fanerantropo di S. Sergi). Allorchè esso compare, come prodotto di un complesso di mutazioni, che lo separa dagli altri animali, progredisce in lui lo sviluppo della coscienza, cioè la facoltà non solo di riflettere e ricordarsi, ma essenzialmente di rappresentare con parole, con simboli e con gesti, per descrivere ai suoi simili ciò che lo circonda, ciò che ha visto e ciò che si propone, o che propone ad altri suoi simili.

Le importanti scoperte di questi ultimi anni, che ci sono state esposte con tanta chiarezza dal Prof. A. C. Blanc ed alle quali egli stesso ha apportato un contributo originale, ci permettono di intravedere che l'*Homo sapiens*, fin dalle sue origini, è in possesso di un mondo mentale, di una vita civile abbastanza complessa, la quale lo rende assai più vicino a noi di quanto generalmente si creda. A poco a poco appare sempre più lontana dal vero l'ipotesi semplicista di un progresso regolare e continuo da una barbarie primitiva ad una vita civile moderna sempre più complessa.

Naturalmente tentativi di ricostruzione dei primi passi dell'*Homo sapiens* sono necessariamente incompleti, perchè non possono essere basati che su pochi reperti fossili rimasti, mentre ci sfugge tutto ciò di cui non sappiamo ricostruire una traccia ancora esistente. L'acuta osservazione del Prof. A. C. Blanc, del cannibalismo rituale e della caccia alle teste degli uomini primi-

tivi, che risulta dimostrata dai reperti quasi costanti di mutilazioni dei crani recentemente scoperti in località sparse in tutto il mondo abitabile, e delle epoche più remote e lontane, non sono forse sufficienti ad autorizzarci a ritenere che la vita normale di quegli esseri consistesse in una lotta aspra e continua. Si osservi che i crani scoperti, mutilati, si trovano, come ad esempio, in quello scoperto dal Blanc sul Monte Circeo, in posizioni singolari, le quali dimostrano che essi corrispondono probabilmente ad atti di cannibalismo rituale, cioè eccezionale, il che non esclude che la vita normale di quel tempo potesse svolgersi abitualmente pacifica e tranquilla.

Più generalmente anzi lo stesso fenomeno di lotta per la vita, studiato con tanto acume da Darwin, come il fattore più importante dell'evoluzione, e il quale ebbe recentemente per opera di Vito Volterra e Umberto D'Ancona una efficace e feconda rappresentazione matematica, è soggetto a numerose limitazioni, le quali possono spiegare la complicazione dei rapporti di convivenza tra specie diverse. La limitazione, in sostanza, è questa, che la difesa delle specie più deboli (divorate) dalle specie più forti (divoratrici), consiste in molti casi nelle diverse abitudini di vita delle due specie. Così ad esempio le abitudini di vita dei felini e degli uccelli rapaci, in gran parte notturni, lasciano una gran parte del tempo, soprattutto nel periodo diurno, che si svolga la vita pacifica e tranquilla della specie divorata. Un caso alquanto più complesso è quello della convivenza di quattro specie, per

esempio uomini, topi, gatti e cereali. I gatti che divorano i topi, sono alleati all'uomo per la difesa dei cereali divorati dai topi, di guisa che è facile intuire, e non sarebbe difficile, estendendo alquanto le equazioni del Volterra, dare una rappresentazione matematica che permetta di studiare le condizioni di equilibrio della coesistenza di queste diverse specie.

Altre analoghe forme di equilibrio devono sussistere tra cicli culturali umani, per esempio agricoltori da una parte e cacciatori e pastori dall'altra, i quali vivono in territori contigui, aventi caratteristiche diverse e tali da permettere lo svolgimento della vita dei due gruppi umani ciascuno nel proprio territorio. La lotta tra i due gruppi può ragionevolmente essere limitata dalle incursioni che attraversano la zona di frontiera, le quali alla loro volta sono limitate dalle diverse condizioni di vita insopportabili ad uno dei due gruppi, allorchè esso cerca di vivere ed acclimatarsi nella zona dell'altro. Ciò è avvenuto, in tempi recentissimi, nella Corea e nella Manciuria, dove i Giapponesi, i quali avrebbero avuto una evidente necessità politica di colonizzarle rapidamente con rilevanti masse di immigranti giapponesi, non sono riusciti in tale intento per la ripugnanza del popolo giapponese ad adattarsi al clima rude ed all'ingrato lavoro agricolo richiesto in quelle regioni. È accaduto invece che, spinto dalla necessità di raggiungere in qualche modo un tale scopo, l'Impero giapponese è stato costretto a rivolgersi e ad incoraggiare l'immigrazione in Man-

ciuria dei Cinesi del nord, ottenendo in tal modo lo scopo imprevisto, ma in ultima analisi benefico, di rafforzare e difendere l'espansione cinese e la sua civiltà, nelle zone settentrionali dell'Asia. Fenomeni analoghi sono stati osservati nelle vicende della colonizzazione dei popoli europei in Asia ed in Africa. I popoli europei più civili, dopo lunga esperienza, cominciano a rendersene conto. Sotto quest'aspetto può ben darsi che l'opera violenta, dura e spesso descritta con foschi colori dagli storici, possa apparire in avvenire più umana e benefica di quanto si rendessero conto i primi conquistatori spagnoli e portoghesi in Asia, in Africa e in America. Invece l'opera distruttiva degli anglosassoni nell'America del nord troverà da questo punto di vista una più difficile difesa.

Il punto di vista da cui io mi sono posto nella mia rapida esposizione si avvicina assai ed accetta il modo di vedere di W. H. R. Rivers sul contatto dei popoli<sup>21</sup>. Il progresso della tecnica e della cultura di un popolo può essere prodotto da un piccolissimo numero di immigranti, talmente piccolo da non avere effetto apprezzabile sulla composizione etnica di un popolo, ma sufficiente ad esercitare un'influenza profonda sul popolo stesso, qualora appaia la superiorità degli immigranti anche soltanto in

---

<sup>21</sup> W. H. R. RIVERS, *The contact of peoples*, in: *Essays and Studies presented to W. Ridgeway*, Cambridge, 1916, pp. 474-492.

alcune particolarità. Il Rivers spiega in tal modo la complessità di diversi riti funebri degli Australiani e dei popoli della Polinesia e della Melanesia. Anche un piccolissimo numero di immigranti, purchè la loro cultura sia ammirata dal popolo inferiore nel quale essi si stabiliscono, può esercitare un'influenza assai grande, non soltanto nella località da essi abitata, ma può estendersi e propagarsi in una vasta zona, cioè da qualche punto costiero dell'Australia, in tutto il continente. Il Rivers spiega in tal modo la contraddizione apparente nella cultura primitiva australiana, come il frutto della combinazione di piccoli gruppi estranei, provenienti da diverse località dell'Asia. Ancora più soddisfacente appare questa ipotesi del Rivers nella spiegazione dei monumenti megalitici tanto singolari e tanto estesi in molte isole del Pacifico e in alcune regioni di continenti vicini al mare. L'idea di ricordare i defunti con monumenti di pietra di grandi dimensioni può essere stata suggerita non tanto dalla forza e dalle armi di un popolo conquistatore, ma soltanto da piccolissimi gruppi di navigatori, la cui cultura è apparsa superiore a quella dei luoghi di approdo.

Io penso che la storia della scienza e del suo sviluppo abbia proceduto in un modo analogo, anche durante il periodo della civiltà europea alla quale noi apparteniamo. Gli uomini tendono naturalmente a conservare e a trasmettere le nozioni apprese; è questa un'opera di conservazione la quale esige un grande numero di studiosi diligenti e pazienti, i quali insegnino, copino e

trasmettano alle generazioni successive ciò che essi hanno appreso. Si hanno rapidi periodi di progresso soltanto allorchè pochissimi studiosi di altri paesi, vissuti in diverse condizioni, riescono a suscitare l'ammirazione e il desiderio di imitarli. Questa ammirazione appare assai più facilmente allorchè il piccolo gruppo di innovatori parla una lingua diversa, mentre in patria questa ammirazione è minore, sia per l'abitudine prodotta dalla convivenza, sia per la difficoltà di abbandonare il sistema posseduto di un complesso di tradizioni nazionali, in un paese straniero; le nuove nozioni e le nuove idee possono apparire anche più importanti di quanto esse non siano e destare, perciò, l'emulazione e il desiderio di percorrere nuove vie. Così si spiega come ad esempio le opere di Newton siano state lette e studiate con maggior fervore fuori dell'Inghilterra; quelle di Galileo e di Volta fuori d'Italia ed anche in tempi moderni ad esempio il metodo Montessori e il teatro di Pirandello.

Da questo punto di vista il bilinguismo ed anche meglio il plurilinguismo, anzichè un inconveniente possono essere uno stimolo non indifferente al progresso scientifico. Una vita cellulare della scienza, la quale possa svilupparsi in un certo grado di segregazione in diverse regioni del mondo, può essere una condizione di progresso scientifico, anche se essa costituisca un ostacolo al progresso di formazioni nazionali, composte di aggregati sempre maggiori. Nella vita delle industrie moderne è

stato osservato che esiste una condizione di *optimum* nella produzione e nel perfezionamento dei prodotti, allorchè le aziende raggiungono una determinata grandezza; le aziende maggiori decadono più facilmente, sono meno produttive, sono meno suscettibili di ulteriore sviluppo. Qualcosa di simile sembra accadere nello sviluppo della scienza.

G. RABBENO: *Fra le probabili cause dell'evento in esame, enumerate dai vari oratori, ne passò inosservata una, forse non trascurabile.*

*Guardando nel loro complesso le due grandi aree ove si svilupparono separate la civiltà cinese e la nostra, si resta colpiti dalla distribuzione geografica inversa delle terre e delle acque. Qui, un mare circondato da tre continenti, ai cui margini si addensano gli aggregati umani; là, una compatta regione circoscritta da oceani senza sponde contrapposte. Qui, una profonda discrepanza di climi, con prodotti naturali complementari; là, una distesa quasi uniforme, di cui ogni parte più o meno bastava ai suoi propri abitanti.*

*Per questo, mentre nella Cina i traffici materiali e la curiosità di esplorare il mondo circostante restarono intorpiditi dalla scarsità degli stimoli, intorno al Mediterraneo dovettero invece moltiplicarsi le ricerche delle merci a ciascuno mancanti, e i bisogni di trasporti e di scambi commerciali. Ne seguì presso i popoli rivieraschi, come è ben noto, un diffuso trapianto di colonie reciproche, e una rapida circolazione della cultura, che appunto ne trasse il suo aspetto per così dire sinfonico. Inoltre, se per costituire le carovane bastano mezzi allo stato di natura, il navigare richiede in ogni suo*

*momento l'artificio tecnico.*

*Sembra quindi probabile che il concorso dei tre elementi: eterogeneità, bisogni e vie acquee, possa aver molto contribuito al formarsi in Occidente dei caratteri psicologici adatti alla germinazione e allo sviluppo della mentalità scientifica, indagatrice e dinamica, mentre le opposte condizioni in Oriente vi mantennero un'intellettualità apaticamente meditativa e statica.*

G. VACCA: È esatta l'osservazione del generale Rabbeno sulla caratteristica continentale dell'area in cui si è sviluppata la civiltà cinese, contrapposta all'area frastagliata attorno al Mediterraneo, dove è sorta la nostra civiltà. Si può ancora aggiungere che il popolo cinese (come anche i Giapponesi primitivi) non ha mai sentito l'influenza del mare; nelle sue tradizioni e nelle sue leggende, la vita marittima e la navigazione hanno avuto un'assai scarsa influenza.

Ma più importante è la posizione marginale occupata dalla civiltà cinese, assai lontana dal centro originario di diffusione. Le aree marginali, come è stato più volte affermato, nell'etnologia e nella linguistica, sono più conservative e si evolvono più lentamente del centro di diffusione originario. Un'altra circostanza favorevole è dovuta alla difficoltà delle comunicazioni della Cina a nord limitata dalle pianure relativamente poco popolate della Manciuria e della Mongolia, ad ovest dal deserto di Gobi e a sud dalle catene montuose del Tibet e dell'Indocina. Le comunicazioni terrestri col resto del continente eurasiatico sono sempre

state assai difficili. La via marittima attraverso l'Oceano Indiano, tra l'India e la Cina di sud-ovest è stata frequentata piuttosto dagli Indiani e poi dai Persiani e dagli Arabi, che non dai Cinesi, ed ha costituito forse la più importante via di comunicazione per le relazioni tra l'India e la Cina, nei secoli scorsi assai più strette che tra la Cina e l'Europa.

P. MINGAZZINI: *Il Prof. P. Mingazzini nega che il sorgere della ricerca scientifica disinteressata nella Grecia del VI secolo e nell'Europa del XV possa essere spiegato con ragioni razziali. Non tutta la Grecia infatti cooperò il movimento di ricerca scientifica, filosofica ed artistica che forma il vanto della Grecia dei secoli VI II; nè la stirpe greca è razzialmente così diversa dalle stirpi indo-europee, che possa vedersi in questa differenza la causa di quella meravigliosa fioritura intellettuale. D'altra parte i Giapponesi ed i Cinesi hanno appreso ed applicato i metodi scientifici europei in modo non diverso dai loro maestri; sicchè la ragione razziale non può assolutamente considerarsi come sufficiente.*

*Nè possono considerarsi come causa sufficiente le condizioni ambientali. Anzi queste furono in Grecia assai meno favorevoli che in Babilonia e in Egitto. Le stesse condizioni ambientali che produssero nei monasteri e nei conventi dei secoli XII e XIII il movimento filosofico che sboccò nella scolastica, avrebbero potuto produrre pure un impulso di ricerca scientifica, che invece si verificò assai più tardi, in opposizione alle tendenze dominanti nel tardo medioevo.*

*E nemmeno può invocarsi la tradizione culturale. Quando Talete ed i*

*primi presocratici iniziarono il movimento di indagine filosofica e scientifica, nessuna tradizione di ricerca filosofica e scientifica preesisteva che indirizzasse il pensiero di alcune menti in quella direzione. E lo stesso può dirsi per Galileo ed i suoi immediati predecessori: che anzi le premesse culturali erano nettamente sfavorevoli.*

*Nè le condizioni geografiche possono considerarsi come una causa sufficiente del movimento intellettuale greco ed europeo. Infatti esse restarono immutate (o subirono mutamenti irrilevanti) negli ultimi venticinque secoli; e tuttavia nè l'Europa ebbe un progresso scientifico durante la grande pace di Roma imperiale, nè lo ebbe la Grecia in età moderna.*

*Nè le condizioni storiche possono logicamente essere invocate per spiegare il sorgere e lo sviluppo della scienza in Grecia ed in Europa. Quale condizione più fortunata dell'Europa durante l'Impero? E quale condizione più infelice della Grecia in perpetua lotta di tutti contro tutti? Eppure questa è la più mirabile fioritura d'ingegni che il mondo abbia visto in sì piccolo spazio, e quella non diè nemmeno uno scienziato di fama.*

*La causa, a parere del disserente, non può essere nè di ordine materiale nè di ordine logico, ma va attribuita ad un impulso spirituale, allo slancio creatore che è proprio dello spirito ed è altrettanto inspiegabile razionalmente, quanto è misterioso il fenomeno della vita nel mondo materiale. Le condizioni dell'ambiente materiale e spirituale sono tutt'al più, condizioni concomitanti, necessarie forse, ma in nessun modo sufficienti a spiegare un fenomeno così squisitamente spirituale come il sorgere dell'ansia della ricerca scientifica nei più nobili intelletti umani.*

G. VACCA: Le osservazioni del prof. P. Mingazzini sono certamente molto importanti. Il progresso della ricerca scientifica, dipende senza dubbio dai suoi momenti più importanti, ad opera di pochi nobili, intelletti. Perchè questi possano manifestarsi, occorre che essi siano stimolati, come ha osservato W. H. R. Rivers (di cui ho parlato nella risposta al professor Blanc) dall'esempio e dell'emulazione di altri uomini riconosciuti superiori, o creduti tali, sviluppati in altri centri civili coi quali sono possibili contatti più o meno diretti. La scienza greca, pure così originale, ha certamente sentito l'influenza dell'Egitto, dell'Asia Minore e di Babilonia. Lo sviluppo della scienza antica dall'età ellenistica si svolge dapprima nella Magna Grecia tra i Greci d'Occidente e nelle città dell'Asia Minore, e nei primi secoli dell'Impero romano continua oltre che a Roma, ad Alessandria d'Egitto, ad Antiochia e a Costantinopoli<sup>22</sup>.

Come ho già osservato al prof. Blanc, lo sviluppo della scienza fiorisce nei popoli bilingui; la civiltà rassomiglia nel suo sviluppo alla floridezza e ricchezza degli incroci tra gruppi affini che l'uomo sa utilizzare a suo vantaggio nell'incrocio di piante e di animali selvatici, sviluppati per mezzo della coltivazione e

---

<sup>22</sup> Si veda *Ordo nobilium urbium* dell'Impero, del poeta Ausonio, del IV secolo d. C., citato da G. Lumbroso, *L'Egitto dei Greci e dei Romani*, II ed., Roma, 1895, pp. 94-95.

dell'addomesticazione.

Naturalmente queste osservazioni non vanno oltre ad accenni di condizioni favorevoli allo sviluppo ed al progresso del pensiero umano, e non bastano a spiegarne la natura e l'essenza.

Il prof. Giovanni Marro ha recentemente pubblicato una nota su «*L'elemento etnico e l'ambiente naturale nella Grecia antica*», negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino vol. 79, 1943-44, pp. 415-441.

G. BONARELLI: *La realizzazione scientifica è una delle tante «espressioni» possibili di qualunque tipo di «civiltà». Essa pertanto, oltre ad esibirsi con caratteristiche proprie, armonizza con quelle che conferiscono, ad ogni civiltà, un particolare cachet. Consideriamone alcuni fattori e sviluppi che si possono considerare indipendenti attraverso lo spazio, conseguenti attraverso il tempo. Abbiamo tre tipi di civiltà più o meno «singenetiche»: — precolombiane, estasiatiche, mediterranee — che nulla hanno fra loro in comune. Sorsero, si svilupparono, ignorandosi a vicenda quasi completamente. Serbarono la loro speciale fisionomia in vista appunto del loro perfetto isolamento. Raggiunsero, per mera convergenza causale, alcune verità nel campo scientifico (astronomia, calendario, numerazione, ecc.) ma per vie diverse e, diremmo, volte a scopi diversi. Quando Marco Polo raggiunse il Cataio egli rimase profondamente sorpreso di trovarsi in un mondo così diverso da quello occidentale. Altri viaggiatori, meno intelligenti di lui, ne derisero perfino certe manifestazioni e certi aspetti esteriori, il più delle volte mal compresi o male interpretati.*

*Attraverso il tempo, possiamo considerare gli sviluppi successivi e conseguenti di civiltà complesse; in questo ordine di ricerche il primo problema da risolvere è quello delle origini. Prendiamo per esempio la civiltà greca, che in sé comprende, per così dire, la civiltà «mediterranea» e che, a parte un suo contenuto autoctono, ha ricevuto un grande afflato dalle antiche civiltà «desertiche» del Nilo, della Mesopotamia, dell'Asia Minore, nonché da quella «talassica» della Fenicia. La Grecia assimila, elabora e fonde in un tutto armonico questo vistoso patrimonio di conoscenze, e Roma, ad un certo momento, sarà, di tanta ricchezza, la quasi unica erede. Il mondo arabo, nell'alto medioevo, ne farà tesoro, a tutto vantaggio della sua cultura enciclopedica. Più tardi sarà la volta dell'umanesimo, poi del criticismo, e così via. La civiltà europea, la scienza europea, tutto devono a questo lungo lavoro di secoli e di millenni.*

*Ma ecco che il pensiero scientifico europeo varca un bel giorno i limiti del minuscolo continente e si diffonde su tutto l'orbe. Inizia una vera conquista e, raggiunto ben presto l'Oriente asiatico, supera le barriere naturali, non per anco violate, entro le quali altre due civiltà, dopo una prima intensa fase dinamica, che le ha portate ai fastigi, si sono assopite in una specie di stasi. Primo a svegliarsi è il Giappone, che subito fiuta un pericolo e crede di poterlo evitare con criteri di difesa.*

*Ora è la volta della Cina, intelligente e laboriosa, la quale peraltro, se da un lato apprezza adeguatamente i vantaggi del progresso scientifico e ne fa proprio il contenuto utilitaristico in tutti i campi, disprezza — e giustamente — la nostra cosiddetta «civiltà» che non le sembra veramente tale, perché troppo misera di valori etici, e sogna un certo domani che le darà il dominio*

*del mondo.*

G. VACCA: La conclusione del prof. Bonarelli è un po' malinconica, ma ha un grande contenuto di verità. La Cina non ha apprezzato fino a questi ultimi decenni l'Europa, in quanto essa aveva ed ha di più nobile, ma non ne ha visto che un aspetto esterno piuttosto materiale.

Ma non è soltanto la Cina che abbia capito poco il senso e l'essenza della civiltà europea. Anche l'Europa non ha visto nei popoli da essa lontani il senso del loro pensiero e della loro cultura. Le opere filosofiche di Cicerone, e specialmente *De Natura Deorum*, sebbene fondate sugli elementi tolti dai pensatori greci, costituiscono il primo sforzo degli Europei per la creazione di due nuove scienze: l'etnologia e la storia delle religioni. Ma queste scienze sono penetrate assai tardi nelle nostre Università, nella seconda metà del sec. XIX. Soltanto nel secolo XVII Bernardo Varenio<sup>23</sup>, dopo aver descritto il regno del Giappone, parla a lungo della religione dei Giapponesi e dell'introduzione del cristianesimo in Giappone. La sua fonte principale sono le relazioni

---

<sup>23</sup> BERNARDO VARENIO, *Descriptio regni Japoniae*, Amsterdam, 1649. La seconda parte di quest'opera contiene una *brevis informatio de diversis gentium religionibus*.

dei missionari gesuiti del sec. XVI e XVII e le successive relazioni dei navigatori olandesi che succedettero ai primi tentativi dei Portoghesi.

Il primo corso di storia generale della religione in Italia fu dato nel B. Istituto di Studi superiori in Firenze nel 1880-81 dal prof. Carlo Puini<sup>24</sup>; esso è di poco posteriore a corsi analoghi del Tylor e di Max Müller in Inghilterra, del Tiele a Leida, ecc. Ma già da un decennio egli aveva pubblicato importanti studi su quest'argomento<sup>25</sup>. Questi studi hanno ripreso ora vigore in questi ultimi anni in tutte le nazioni civili, e formano una delle più urgenti ricerche perchè la pace e la concordia possa mantenersi nel mondo.

---

<sup>24</sup> C. PUINI, *Saggi di storia della religione*, Firenze, 1882.

<sup>25</sup> C. PUINI, *I sette genii della felicità*, notizie sopra una parte del culto dei Giapponesi, Firenze, 1872, etc.

## Bibliografia

Oltre agli autori citati nel testo, segnalo soltanto alcuni scritti dai quali il lettore può attingere altre notizie.

V. K. TING: *How China acquired a civilization*, in *Symposium on Chinese Culture*, edited by Sophia H. Chen Zen, Shanghai, 1931.

H. C. ZEN: *Science, its Introduction and Development in China* (ibid.).

G. VACCA: *Some points on the History of Science in China*, in *Journal of the North China Branch of the Royal Asiatic Society*, LXI, Shanghai, 1930.

— *La scienza nell'Estremo Oriente*, in *Scientia*, Bologna 1912, vol. XI pp. 232-250.

*Encyclopédie Française*, Tome I, *L'outillage mental*, Parigi, 1937. Contiene sottili analisi di J. Hadamard, H. Maspero ed altri.

R. DEDEKIND: *Essenza e significato dei numeri*, trad. e note di O. Zariski, Roma, 1926. La prima edizione tedesca è del 1888. È uno scritto di capitale importanza. La terminologia, un po' faticosa, dell'A., deriva da quella dei suoi maestri, Gauss e Dirichlet. G. Peano ne ha estratto, con somma semplicità, il sistema di postulati esposto, in latino classico, nell'opera seguente.

G. PEANO: *Arithmetices principia novo methodo exposita*, Torino, 1889.

— *Rivista di Matematica*, I-IX, Torino, 1891-1909.

— *Formulario Mathematico*, I-V, Torino, 1892-1908.

- M. PIERI: *Uno sguardo al nuovo indirizzo logico matematico delle scienze deduttive*, Catania, 1907.
- PHILIP E. B. JOURDAIN: *The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics*, Quart. Journ. of Math, XLI, 1910, pp. 324-352; XLIV, 1913, p. 128. È una storia assai accurata della logica matematica. Si veda la biografia di P. E. B. Jourdain 1879-1919) in: GINO LORIA: *Scritti, conferenze, discorsi sulla Storia delle matematiche*, Padova, 1937, pp. 370-385.
- G. VACCA: *Sur le principe d'induction mathématique*, in «Revue de Métaphysique et de Morale», 1911, p. 30, 252.  
— *Sul principio della discesa di Fermat*, Atti della R. Acc. di Torino, 1928. pagine 241-252.
- V. VOLTERRA: *Saggi scientifici*, Bologna, 1920.
- F. ENRIQUES: *Per la storia della Logica*, Bologna, 1922.
- U. CASSINA: *L'opera scientifica di Giuseppe Peano*, in «Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano», vol. VII, Milano, 1933.
- P. GENTZEN: *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Math. Ann., vol. 112, 1936, p. 493-565.
- Hanno invece seguito indirizzi in parte diversi da quello di G. Peano, in esposizioni critiche:
- C. BURALI-FORTI: *Logica matematica*, II ed., Milano, Hoepli, 1919.
- A. PADOA: *Logica*, in «Enciclopedia delle Matematiche elementari», a cura di L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli, Milano, vol.

I, 1930.

G. LORIA: *Alessandro Padoa*, in «Annuario della R. Università di Genova», Genova, 1938.

(Gino Loria osserva che «in questo ultimo scritto di A. Padoa il mutamento del titolo: *Logica* invece di *Logica matematica*, indica la delusione che il Padoa deve aver provato nel riconoscere che dalla logica matematica, la matematica non ritraeva quei vantaggi che Leibniz aveva sognato. L'eccessiva complicazione dell'esposizione di A. Padoa in questo scritto, mi sembra invece una prova dello sforzo, destinato all'insuccesso, di realizzare il sogno inattuabile di Leibniz.)

B. LEVI: *Fondamenti della Logica*, in «Annuario Scientifico e Industriale», LXIV, Bologna, 1931.

Fuori d'Italia numerosi studi importanti sono apparsi in questi ultimi anni. Cito soltanto:

D. HILBERT: *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, in Atti del Congresso Internaz. dei matematici, Bologna 1919, T. I., p. 135. Parlando della logica matematica egli scrive, pag. 137: «Wie Sie bemerken, ist ein wesentliches Hilfsmittel für meine Beweistheorie die Begriffsschrift, und wir verdanken dem Klassiker dieser Begriffsschrift, Peano, die sorgfältigste Pflege und weitgehendste Ausbildung derselben».

JACQUES HERBRAND: *Sur le problème fondamental de la logique mathématique*, in: Comptes Rendus des séances de la Soc. des Sciences d'Warsovie, XXIV, classe III, Warszawa, 1931.

Questo; e gli altri pochi scritti di questo ricercatore acutissimo immaturamente scomparso, trovano il loro fondamento ed il loro significato nelle più sottili speculazioni dell'analisi matematica.

F. WAISMANN: *Introduzione al pensiero matematico*, trad. di L. Geymonat, Torino, 1939.

P. I. M. BOCHENSKI, O. P.: *Nove lezioni di logica simbolica*, Roma, 1938.

L'esposizione è resa piuttosto ingombrante ed oscura dalle complicate notazioni di J. Lukasiewicz.

E. T. BELL: *Men of Mathematics, the lives and Achievements of the great Mathematicians from Zeno to Poincaré*, Londra, 1937.

Interessante esposizione storica. Notevoli le notizie sulla vita scientifica di R. Dedekind (nel cap. XXVII).

BLANC A. C.: Etnolisi. *Sui fenomeni di segregazione in Biologia ed in Etnologia*, Riv. di Antropologia, XXXIII, Roma, 1941-42.

— Cosmolisi - *Interpretazione genetico-storica delle entità e degli aggruppamenti biologici ed etnologici*, Riv. di Antropologia, XXXIV, Roma, 1942-43.

— *Lisi e segregazione nella genesi delle forme distinte*, «Quaderni di Sintesi», 2, Roma, 1946.

# INDICE

Sommario – Sommaire – Summary

Dedica

Prefazione

I. – Perchè non si è sviluppata la scienza in Cina

II. – Matematica e tecnica. Origine e sviluppo dei concetti  
matematici

III. – I. Logica matematica e logica

III. – 2. Sui postulati dell'Aritmetica e della loro compatibilità

Appendice

Discussione seguita alla conferenza «Perchè non si è svilup-  
pata la scienza in Cina»:

Osservazioni di A. C. Blanc

Osservazioni di G. Rabbeno

Osservazioni di P. Mingazzini

Osservazioni di G. Bonarelli

Bibliografia.