



I S E M P R E V E R D E

EUCLIDES



Elementi. Libro primo

ATHENA
EDIZIONI

Athena Edizioni ti regala questo libro in formato cartaceo, stampato e spedito gratuitamente a casa tua. Infatti per ogni libro acquistato dal sito potrai scegliere un libro della collana Sempreverde in omaggio. Visita edizioniathena.it per maggiori informazioni.

ELEMENTI

LIBRO I

I.

Termini¹

1 Traduco con *termini*, il greco ὅροι piuttosto che con *definizioni*, come si fa comunemente, perché queste prime pagine introduttorie, invece che *definizioni matematiche*, sono piuttosto chiarimenti o spiegazioni analoghe a quelle che si danno oggi nei dizionari. Queste prime pagine contenenti queste prime spiegazioni, i *postulati* e le *nozioni comuni*, sono state, con tutta probabilità, assai alterate e deformate durante i molti secoli nei quali questo libro fu adoperato nelle scuole. È lecito supporre che le pagine introduttorie originarie fossero tanto eleganti e sobrie quanto

1. PUNTO è ciò che non ha parti.
 2. LINEA una lunghezza senza larghezza.
 3. ESTREMI DI UNA LINEA son punti.
 4. LINEA RETTA è quella che è posta in pari rispetto ai suoi punti.
 5. SUPERFICIE è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
 6. ESTREMI DI UNA SUPERFICIE son linee.
 7. SUPERFICIE PIANA è quella posta in pari rispetto alle sue rette.
 8. ANGOLO PIANO è l'inclinazione di due linee in un piano che si toccano, ma non sono per diritto.
 9. Quando le linee comprendenti un angolo son rette, l'angolo si chiama RETTILINEO.
 10. Se una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due
-
- son quelle che si trovano premesse agli scritti di Archimede e di Apollonio.

angoli eguali è RETTO, e la retta posta si chiama PERPENDICOLARE a quella su cui è stata posta.

11. ANGOLO OTTUSO è quello maggiore di un retto.

12. ACUTO è quello minore di un retto.

13. TERMINE è l'estremo di qualche cosa.

14. FIGURA è ciò che è compreso da uno o più termini.

15. CIRCOLO è una figura piana, compresa da una sola linea, tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto entro la figura, sono eguali tra loro.

16. CENTRO DEL CIRCOLO si chiama quel punto.

17. DIAMETRO DEL CIRCOLO è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti alla circonferenza del circolo, la quale divide anche il circolo per metà.

18. SEMICIRCOLO è la figura compresa dal dia-

metro e dalla circonferenza da esso tagliata.

Il centro del semicircolo è lo stesso del centro del circolo.

19. FIGURE RETTILINEE son quelle comprese da rette, TRILATERE da tre, QUADRILATERE da quattro, MULTILATERE quelle comprese da piú di quattro.

20. Tra le figure trilatera è TRIANGOLO EQUILATERO quello che ha i tre lati eguali; ISOSCELE quello che ha due soli lati eguali; SCALENO quello che ha i tre lati diseguali.

21. Inoltre tra le figure trilatera, è TRIANGOLO RETTANGOLO quello che ha un angolo retto, OTTUSANGOLO quello che ha un angolo ottuso, ACUTANGOLO quello che ha i tre angoli acuti.²

² Si notino le inaspettate definizioni di triangolo *scaleno*, e di triangolo *acutangolo*, le quali obbligano subito a riflettere, chi per la prima volta sente parlare di geometria.

22. Tra le figure quadrilatera è QUADRATO quella che è equilatera e rettangola; OBLUNGO quella che è rettangola ma non equilatera; ROMBO quella che è equilatera ma non rettangola; ROMBOIDE quella che ha i lati e gli angoli opposti eguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola; si chiamino TRAPEZII³ tutti gli altri quadrilateri.

23. PARALLELE sono rette, le quali sono nello stesso piano, e prolungate all'infinito da ognuna delle due parti, da nessuna delle due parti si incontrano tra loro.⁴

3 L'uso di chiamar *trapezii* i quadrilateri aventi due lati paralleli è posteriore ad Euclide.

4 Si noti che dire che due rette nello stesso piano incontrate da un'altra retta, si incontrano tra loro, val quanto dire che le tre rette formano un triangolo; e che invece il dire che due rette nello stesso piano incontrate da una terza non s'incon-

Postulati.

1. Si ammetta di poter tirare da ogni punto ad ogni [altro] punto, una linea retta;

2. e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;

3. e con ogni centro e con ogni distanza, descrivere un circolo;

4. e che tutti gli angoli retti sono eguali tra loro;

5. e che se una retta incontrando due rette, fa gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito, si incontrano da quella parte nella quale gli angoli son minori di due retti.⁵

trano tra loro, val quanto dire che esse sono parallele, ovvero val quanto dire che le tre rette non formano un triangolo.

5 Questo postulato è adoperato per la prima volta nella proposizione (29).

Nozioni comuni.⁶

1. Le cose eguali ad una stessa, sono eguali tra loro.
2. E se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i tutti sono eguali.
3. E se da cose eguali si tolgono cose eguali, i resti sono eguali.
4. E le cose sovrapponentisi l'una sull'altra, sono eguali tra loro.⁷

⁶ La parola *assiomi* non è adoperata da Euclide. Aristotile li aveva chiamati *κοινὰ δόξαι*, *opinion comuni*, suggerendo così forse la frase Euclidea.

⁷ Euclide adopera nella (4) anche la proposizione inversa che cioè *cose eguali tra loro si possono sovrapporre l'una sull'altra*. La distinzione tra *eguaglianza* e *sovrapponibilità* è assai sottile.

Euclide però non fa una teoria generale della

5. E il tutto è maggior della parte.

sovrapposizione. Una teoria completa della *congruenza* (ovvero sovrapponibilità delle figure) è stata costruita da PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, ed esposta con molte semplificazioni da G. PEANO, *Sui fondamenti della geometria*, Riv. di Mat., 1894, t. 4 p. 75 e segg.

A me sembra però preferibile, quando si voglia fare questa distinzione, conservare alla parola *eguali* il senso che essa ha nella logica, ricorrendo invece che alla creazione di una nuova *relazione di congruenza*, ad una frase un po' più complessa come *eguali in forma, di equal figura*, etc.

LIBRO PRIMO

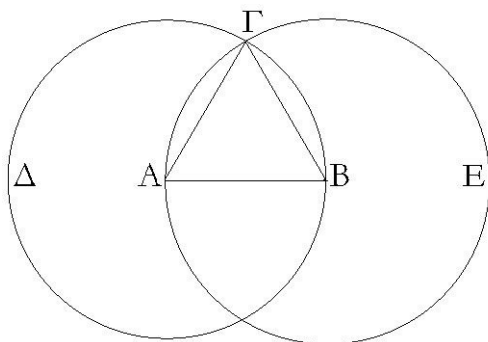
1. — *Sopra una retta data terminata, costruire un triangolo equilatero.*⁸

Sia *AB* la retta data terminata.

Nelle citazioni, i *termini* si indicheranno così: (T 10); i *postulati*, così: (P 3); le *nozioni comuni* così (C 2); e le *proposizioni* col semplice numero (17).

8 Si è obiettato a questa dimostrazione e a quella della successiva (22), che in esse Euclide ammette come evidente, che *se un circolo ha il centro su di un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia*. Si è tentato di dimostrare recentemente questa proposizione per mezzo di altri postulati, assai più complicati. Sembra però più semplice l'ammettere tacitamente questa proposizione, come parve evidente ad Euclide.

Si deve sulla retta AB costruire un triangolo equilatero.



Con centro A e distanza AB si descriva (P3) il circolo $B\Gamma\Delta$, e di nuovo con centro B e distanza

BA si descriva (P3) il circolo $A\Gamma E$, e dal punto Γ in cui i circoli si tagliano tra loro, si conducano (P1) ai punti A, B le rette $\Gamma A, \Gamma B$.

E poiché il punto A è centro del circolo $\Gamma\Delta B$, la $A\Gamma$ è eguale (T15) alla AB . E di nuovo, poiché il punto B è centro del circolo $\Gamma A E$, la $B\Gamma$ è eguale alla BA (T15). Ma si è già dimostrato che ΓA è eguale alla AB . Dunque ognuna delle $\Gamma A, \Gamma B$ è eguale alla AB . Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C1), dunque la ΓA è eguale alla ΓB . Dunque le tre $\Gamma A, AB, \Gamma B$ sono eguali tra loro.

Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è equilatero ed è costruito sulla retta data terminata AB , come dovevasi fare.

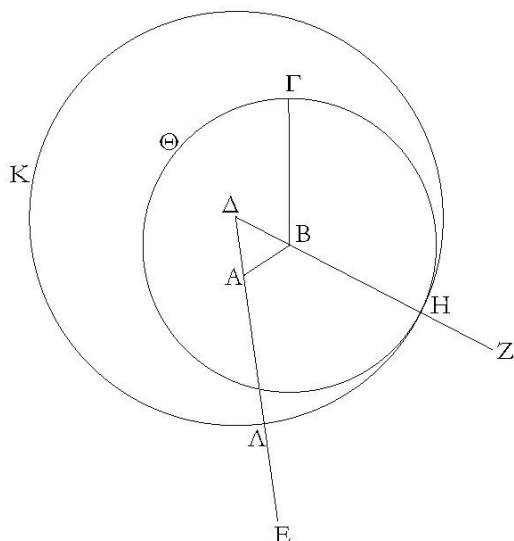
2. — *Ad un dato punto apporre una retta eguale ad una data retta.*⁹

⁹ Questa proposizione ha molti casi, già analizzati da Proclo. A seconda della disposizione delle figure occorre cambiare alcune parole nella dimostrazione. Si può però sempre ridursi al caso esposto da Euclide. È infine da osservarsi che in altre proposizioni (per es. nella 7) Euclide sviluppa soltanto il caso più difficile.

L'interesse di questa proposizione è duplice. Essa è anzitutto una elegante applicazione della proposizione precedente e delle nozioni comuni. In secondo luogo essa rende inutile il *trasporto* di una retta nel piano, potendosi supporre con A . De Morgan, che il *compasso* adoperato da Eucli-

Sia A il punto dato, e sia $B\Gamma$ la retta data. Si deve al punto A apporre una retta eguale alla retta data $B\Gamma$.

Si conduca infatti dal punto A al punto B la retta AB (P1), e si costruisca su di essa il triangolo equilatero ΔAB (1), e si prolunghino per diritto (P2) alle ΔA , ΔB le rette AE , BZ , e con centro B e distanza $B\Gamma$ si descriva il circolo $\Gamma H\Theta$ (P3), ed ancora con centro Δ e distanza ΔH si descriva (P3) il circolo $HK\Delta$.



Poiché il punto B è centro del circolo $\Gamma B\Theta$, la $B\Gamma$ è eguale alla BH . Ed ancora unte, appena riga sia così fatta

che su di essa non si possano far segni.

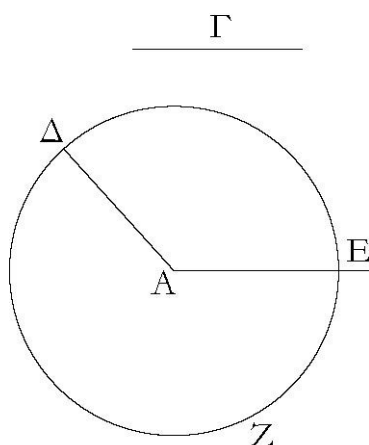
poiché il punto Δ è centro del circolo $HK\Gamma$, la ΔA è eguale alla ΔH , delle quali la parte ΔA è eguale alla ΔB . Dunque il resto $A\Lambda$ è eguale al resto BH (C3). Ma si è dimostrato che la $B\Gamma$ è eguale alla BH . Dunque ognuna delle due $A\Lambda$, $B\Gamma$ è eguale alla BH . Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C1), e perciò la $A\Lambda$ è eguale alla $B\Gamma$.

Dunque al punto dato A si è apposta la $A\Lambda$, eguale alla retta data $B\Gamma$, come dovevasi fare.

3. — *Date due rette diseguali, dalla maggiore tagliare una retta eguale alla minore.*¹⁰

¹⁰ Lo scopo di questa proposizione, come quello della precedente, è di evitare il *trasporto* di una retta nel piano (poiché per mezzo di questo trasporto i problemi (2) e (3) si risolvono immediatamente), e di limitarsi alle operazioni ammesse dai primi tre *postulati*.

Siano AB , Γ le due rette date diseguali delle quali AB sia la maggiore.



Si deve allora dalla maggiore AB tagliare una retta eguale alla Γ .

Si apponga al punto A , la AD eguale alla retta Γ (2), e con centro A e distanza AD si descriva il circolo ΔEZ (P3).

E poiché il punto A è centro del circolo ΔEZ è AE eguale alla AD (T15); ma anche la Γ è eguale alla AD . Dunque ognuna delle AE , Γ è eguale alla AD . Dunque (C1) anche la Γ è eguale alla AE .

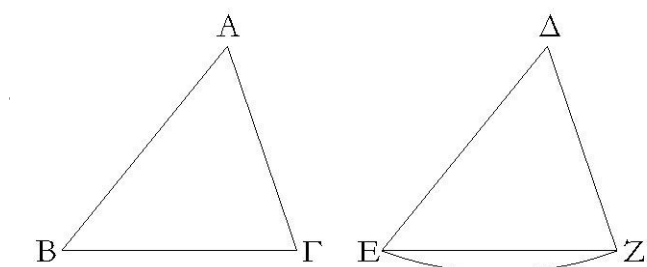
Dunque, *date due rette diseguali dalla maggiore si è tagliata una retta eguale alla minore*, come dovevasi fare.

4. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed un angolo eguale ad un angolo, quello cioè compreso dalle rette eguali, avranno anche la base eguale alla base, e il triangolo sarà eguale al triangolo, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali.*¹¹

11 Si noti che nell'enunciato è detto «angolo... compreso dalle rette eguali», e non «compreso dai lati eguali», per conservare la frase adoperata per definire un angolo (T 9).

È stato obiettato a questa proposizione che essa implica postulati non formulati, e che è quindi più semplice assumerla tutta intera come un postulato (per es. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, p. 9), ma l'osservazione è antica (IACOBI PELETARII, In *Euclidis Elementa geometrica de-*

Siano i due triangoli, aventi due lati $AB, A\Gamma$ eguali ai due lati $\Delta E, \Delta Z$ ciascuno a ciascuno, e l'angolo $BA\Gamma$ eguale all'angolo $E\Delta Z$.



Dico che an-
557, p. 15: «....
rum esse, ne-

que probatione egere, sed Definitionis cuiusdam loco habendum esse»).

Si osservi però che per mezzo di questa proposizione Euclide, ricorrendo più volte alla nozione comune (C 4), dimostra che la *sovrapposizione* di due triangoli eguali si può fare sovrapponendo soltanto un lato ed un angolo di esso. La dimostrazione di Euclide, accenna assai in scorcio, ad una possibile teoria della *sovrapposizione*.

Questo metodo di dimostrare l'eguaglianza di due figure per sovrapposizione, sembra più antico di Euclide. Infatti Proclo riferisce (HEATH p.

che la base $B\Gamma$ è eguale alla base EZ , e che il triangolo $AB\Gamma$ sarà eguale al triangolo ΔEZ , e che i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati

253) che TALETE collo stesso metodo avrebbe dimostrato che ogni diametro taglia il circolo in due parti eguali.

Si noti ancora che la (4) ha una immediata applicazione in agrimensura e in topografia. Se si ha una linea poligonale piana, e di essa si conoscono tutti i lati, e gli angoli che ogni lato fa con quello che lo segue, la linea poligonale è determinata, cioè *due linee poligonali aventi i lati e gli angoli anzidetti ordinatamente eguali, sono eguali.*

La dimostrazione si conduce come quella della (4).

Se si congiunge ogni vertice della poligonale,

eguali, $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ , e $A\Gamma B$ [eguale] a ΔZE .
 Infatti sovrapposto il triangolo $AB\Gamma$ al triangolo ΔEZ e posto il punto A sul punto Δ e il lato AB sul lato ΔE , anche il punto B si sovrapporrà al punto E , per essere AB eguale alla ΔE (C4 nota). E sovrapposta la AB alla ΔE , anche la $A\Gamma$ si sovrapporrà alla ΔZ per esser l'angolo $BA\Gamma$ eguale a $E\Delta Z$. Perciò anche il punto Γ si sovrapporrà al punto Z per esser di nuovo eguale $A\Gamma$ alla ΔZ (C4 nota). Ma anche B è sovrapposto ad E . Perciò anche la base $B\Gamma$ si sovrapporrà alla base EZ . Poiché se B è posto su E e Γ su Z , se la base $B\Gamma$ non è sovrapposta alla base EZ , due rette comprenderebbero uno spazio, ciò che è impossibile. Sarà quindi anche la base $B\Gamma$ sovrapposta alla base EZ , e sarà ad essa eguale. Dunque anche

con quello che lo precede di due posti, si ha una *catena rigida di triangoli*.

tutto il triangolo $AB\Gamma$ sarà sovrapposto al triangolo ΔEZ e sarà ad esso eguale (C4), ed i restanti angoli saranno sovrapposti ai restanti angoli, e ad essi saranno eguali (C4), cioè $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ , ed $A\Gamma B$ eguale a ΔZE .

Dunque, *se due triangoli, etc.*, come dovevasi dimostrare.

5. — *Gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono eguali tra loro, e, prolungati i lati eguali, gli angoli sotto la base, saranno eguali tra loro.*¹²

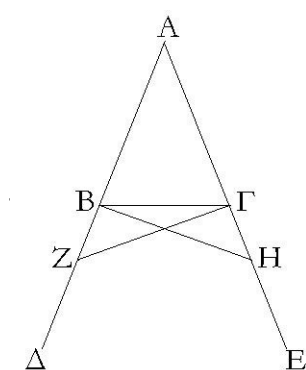
¹² Si noti che il ragionamento ha una lieve imperfezione. Infatti a principio della dimostrazione si dice «*si tolga dalla maggiore AE, la AH eguale alla AZ...*». Come si può esser certi che sia AE maggiore di AZ ? Evidentemente, o *prolungando* quanto occorre la AE , ovvero, il che è lo stesso *prendendo* Z , quanto occorre, vicino a B .

Un'altra dimostrazione della prima parte di que-

Sia il triangolo isoscele $AB\Gamma$ avente il lato AB eguale al lato $A\Gamma$ e si prolunghino per diritto (P2) ad $AB, A\Gamma$, le rette $B\Delta, \Gamma E$.

Dico che l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma B$, e che anche $\Gamma B\Delta$ è eguale a $B\Gamma E$.

Si prenda infatti sulla $B\Delta$ un punto a caso Z , e si tolga dalla maggiore AE la AH eguale alla AZ (3), e si conducano le rette $Z\Gamma, HB$ (P1).



Poiché dunque AZ è eguale ad AH , ed AB è eguale ad $A\Gamma$, è stata data da Proclo, il quale si prolunghino i lati e si prenda Δ sul lato AB , e questa dimostraz. non è soggetta alla osservazione precedente.

Pappo, secondo quanto Proclo riferisce, dimostrava questa prima parte senza nessuna costruzione, considerando il triangolo $AB\Gamma$, come *due* triangoli sovrapposti etc.

anche le due ZA , $A\Gamma$ sono eguali alle due HA , AB ciascuna a ciascuna, e comprendono l'angolo comune ZAH ; perciò la base $Z\Gamma$ è eguale alla base BH ed il triangolo $AZ\Gamma$ al triangolo AHB , ed i restanti angoli sono eguali ai restanti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè a cui sottendono eguali lati (4), cioè $A\Gamma Z$ è eguale ABH , ed $AZ\Gamma$ è eguale ad AHB . E poiché tutta la AZ è eguale alla AH , ed AB è eguale ad $A\Gamma$, la restante BZ è eguale alla restante ΓH (C3). Ma si è dimostrato che anche $Z\Gamma$ è eguale a HB .

Perciò le due BZ , $Z\Gamma$ sono eguali alle due ΓH , HB ciascuna a ciascuna, e l'angolo $BZ\Gamma$ è eguale all'angolo ΓHB , e la loro base $B\Gamma$ è comune. Perciò il triangolo $BZ\Gamma$ sarà eguale al triangolo ΓHB , ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli cioè a cui sottendono lati eguali (4). Quindi l'angolo $ZB\Gamma$ è eguale

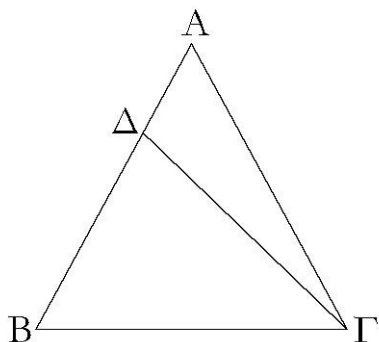
a $H\Gamma B$, e $B\Gamma Z$ è eguale a ΓBH . Ma poiché tutto l'angolo ABH è stato dimostrato eguale all'angolo $A\Gamma Z$, e di essi la parte ΓBH eguale ad $B\Gamma Z$, pure il resto $AB\Gamma$ è eguale al resto $A\Gamma B$ (C3); e sono alla base del triangolo $AB\Gamma$. E già si era dimostrato che $ZB\Gamma$ è eguale a $H\Gamma B$, i quali sono sotto la base.

Dunque, *gli angoli alla base*, etc. come dovevasi dimostrare.

6. — *Se in un triangolo due angoli sono eguali tra loro, anche i lati sottendenti gli angoli eguali saranno eguali tra loro.*¹³

13 In questa proposizione Euclide adopera per la prima volta il metodo di dimostrazione chiamato da ARISTOTELE *riduzione all'assurdo* (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή, *Anal. prior.* I, 7, 29b 5) ovvero *dimostrazione per assurdo* (ἡ διὰ τοῦ ἀδυνάτου ἀπόδειξις, *ibid.* I, 29, 45a 35), od anco-

Sia il triangolo $AB\Gamma$ avente l'angolo $AB\Gamma$ eguale all'angolo $A\Gamma B$.



Dico che anche il lato AB è eguale al lato $A\Gamma$.

Se infatti la AB non è eguale alla $A\Gamma$, una di esse è maggiore. Sia mag-

giore la AB , e si tolga dalla maggiore AB la ΔB eguale alla minore (3), e si congiunga la $\Delta\Gamma$. Poiché dunque la ΔB è eguale alla $A\Gamma$ e la $B\Gamma$ è comune, le due AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due $A\Gamma$, $B\Gamma$ ciascuna a ciascuna, e l'angolo $\Delta B\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma B$, dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base AB , ed il triangolo $\Delta B\Gamma$ sarà eguale al triangolo $AB\Gamma$ (4), il minore al maggiore, il che è im-

ra dimostrazione conducente all'assurdo (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἄγουσα ἀπόδειξις, *Anal. post.* I, 24, 85a 16).

possibile.

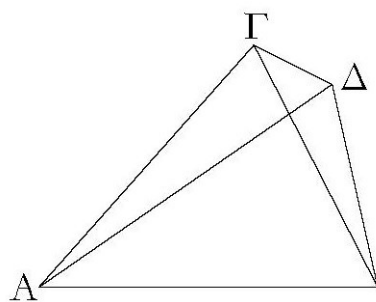
Dunque non è AB diseguale ad AF , dunque è eguale.

Dunque, *se in un triangolo*, etc. c. d. d.

7. — *Sulla stessa retta, a due stesse rette, non si possono condurre altre due rette, eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi delle due prime rette.*¹⁴

¹⁴ L'enunciato della (7) tradotto letteralmente è oscuro. I diversi traduttori lo hanno alterato in vari modi. La versione *libera* più semplice, e più vicina al testo greco, ma chiara, sembra la seguente: «A due punti diversi e dalla stessa parte di una stessa retta, non si possono condurre due rette eguali tra loro, da ognuno dei due estremi della retta».

Poichè se è possibile, sulla stessa retta AB , alle due stesse rette $A\Gamma$, ΓB si conducano altre due



rette $A\Delta$, ΔB eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi Γ , Δ e dalla stessa parte, aventi gli stessi

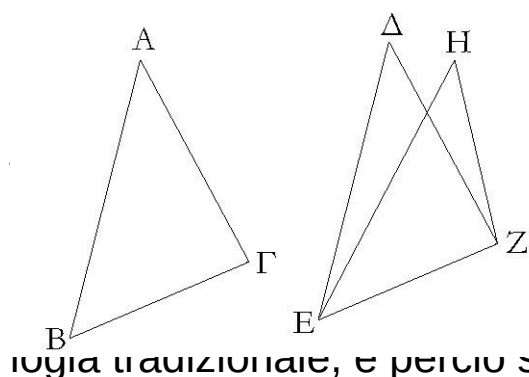
estremi, cosicchè ΓA sia eguale a ΔA , aventi lo stesso estremo A , e ΓB sia eguale a ΔB , aventi lo stesso estremo B .

Si conduca la ΓA .

Poichè dunque $A\Gamma$ è eguale ad $A\Delta$, l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale a $A\Delta\Gamma$ (5). Dunque $A\Delta\Gamma$ è maggiore di $\Delta\Gamma B$. E quindi $\Gamma\Delta B$ è molto maggiore di $\Delta\Gamma B$ (C5). Ma ancora, poichè ΓB è eguale a ΔB , l'angolo $\Gamma\Delta B$ è eguale a $\Delta\Gamma B$ (5). Ma si è dimostrato che è molto maggiore, il che è impossibile.

Dunque *sulla stessa retta* etc. c. d. d.

8. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base eguale alla base, avranno anche eguali gli angoli compresi da rette eguali.*¹⁵



Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ avven-
il testo greco così
nente della fraseo-

logia tradizionale, e perciò sebbene vago, era facilmente capito dai geometri greci. Si trovano infatti enunciati spesso nello stesso modo ellittico ed oscuro, molti teoremi di geometria nelle opere di Aristotele.

Euclide dà soltanto il caso piú difficile, in cui si supponga il punto Δ esterno al triangolo $AB\Gamma$. Se Δ si suppone interno al triangolo, con qualche lieve semplificazione si può ripetere la stessa dimostrazione.

ti i due lati AB , AF eguali ai due lati ΔE , ΔZ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE , ed AF a ΔZ . Ed abbiano anche la base BF eguale alla base EZ . Dico che anche l'angolo BAF è eguale all'angolo $E\Delta Z$.

Infatti sovrapposto il triangolo ABF sul triangolo ΔEZ e posto il punto B sul punto E e la retta BF sulla retta EZ , anche il punto F si sovrapporrà al punto Z per essere BF eguale ad EZ .

Ma sovrapposta la BF sulla EZ , si sovrapporranno anche le BA , AF sulle $E\Delta$, ΔZ . Poiché se la base BF è sovrapposta alla EZ ed i lati BA , AF non si sovrappongono sui lati $E\Delta$, ΔZ ma cadono fuori come in EH , HZ si saranno costruite sulla stessa retta, alle stesse due rette, altre due rette eguali, ciascuna a ciascuna, da due punti diversi e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi delle due prime rette.

Ma non si possono costruire (7); dunque non [è vero che] sovrapposta la base BF sulla base EZ , non si sovrapporranno i lati BA, AF ai lati $E\Delta, \Delta Z$. Dunque si sovrapporranno. Dunque anche l'angolo BAF si sovrapporrà all'angolo $E\Delta Z$ e sarà ad esso eguale.

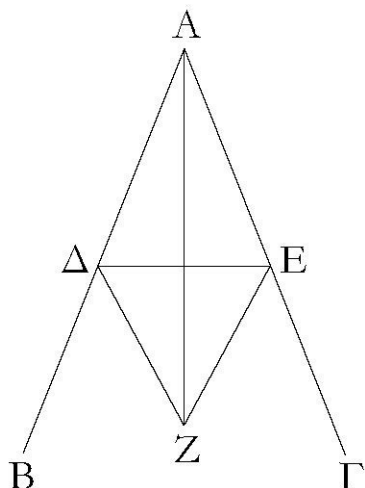
Dunque se *due triangoli*, etc. c. d. d.

9. — *Dividere per metà un dato angolo rettilineo.*¹⁶

16 Già ai geometri greci era venuto il desiderio di trovare una costruzione per dividere un angolo in tre o in un maggior numero di parti eguali. Non essendovi riusciti, adoperando soltanto rette e cerchi, adopraronò altre curve. NICOMEDE triseccò l'angolo per mezzo della *concoide*, ed ARCHIMEDE per mezzo dell'intersezione di un circolo e di una retta che ruota nel piano, nel suo *Lemma VIII*. IPPIA per mezzo della sua quadratrice, ed

Sia $BA\Gamma$ il dato angolo rettilineo; occorre dividerlo per metà.

Si prenda sulla AB a caso il punto Δ , e si tolga dalla $A\Gamma$, la AE eguale alla $A\Delta$ (3), si conduca la ΔE e sulla ΔE si costruisca il triangolo equilatero ΔEZ (1), e si conduca la AZ .



Dico che l'angolo $BA\Gamma$ è diviso per metà dalla AE .

Poiché infatti $A\Delta$ è eguale alla AE , ed AZ è comune, le due $\Delta A, AZ$

ARCHIMEDE colla sua *spirale*, insegnarono a dividere un angolo in qualsivoglia numero di parti eguali. Soltanto i matematici del secolo XIX riuscirono a dimostrare che adoperando un numero finito di intersezioni di rette e di cerchi, non si può trisecare un angolo qualunque.

sono eguali alle due EA , AZ ciascuna a ciascuna.
E la base ΔZ è eguale alla base EZ . Perciò
l'angolo ΔAZ è eguale all'angolo EAZ (8).

Dunque il dato angolo rettilineo $BA\Gamma$ è diviso
per metà dalla retta AZ , come dovevasi fare.

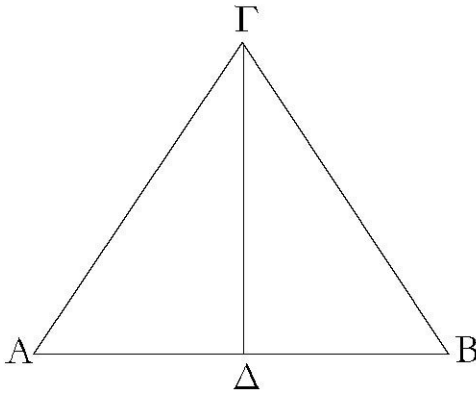
10. — *Dividere per metà una data retta termi-
nata.*¹⁷

Sia AB la retta data terminata; occorre dunque
dividerla per metà.

Si costruisca su di essa il triangolo equilatero
 $A\Gamma B$ (1), e si divida per metà l'angolo $A\Gamma B$ colla
retta $\Gamma\Delta$ (9).

¹⁷ Il problema analogo a quello della *trisezione*
di un angolo, è la trisezione di una retta. Essa
non può farsi senza ricorrere al postulato delle
parallele (P5). La dimostrazione di questa impos-
sibilità però non è semplice, cfr. nota alla (34).

Dico che la AB è divisa per metà nel punto Δ .



Infatti la $A\Gamma$ è
eguale alla ΓB , la
 $\Gamma\Delta$ è comune, e le
due $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ sono
eguali alle due $B\Gamma$,
 $\Gamma\Delta$ ciascuna a cia-

scuna; e l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$.

Perciò la base $A\Delta$ è eguale alla base $B\Delta$ (4).

Dunque la data retta terminata AB è divisa in Δ ,
c.d. f.

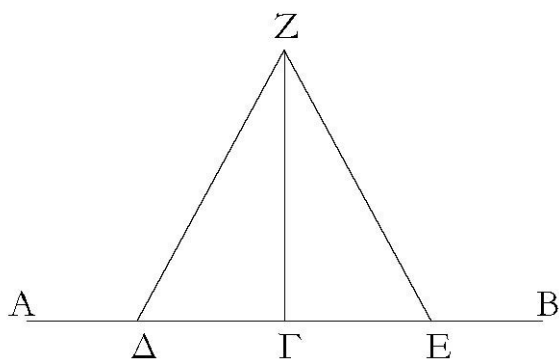
11. — *Ad una retta data, da un punto dato su di
essa condurre una linea retta ad angolo retto.*¹⁸

18 A. DE MORGAN ha osservato che se, come
oggi talvolta si fa, si includono gli angoli *piatti* tra
gli angoli formati da due rette, (T 10) la (11) di-
venta un caso particolare della (9), la costruzione
essendo la stessa.

Sia AB la retta data, e sia Γ il punto dato su di essa. Si deve dunque dal punto Γ condurre alla retta AB una retta ad angolo retto.

Si prenda su AB un punto a caso Δ , e si prenda ΓE eguale a $\Gamma \Delta$ (2), e su ΔE si costruisca un triangolo equilatero (1), e si conduca la $Z\Gamma$.

Dico che alla retta data AB , dal punto Γ dato su di essa, è stata condotta, ad angolo retto, la retta $Z\Gamma$.



Poiché infatti $\Delta\Gamma$ è eguale a ΓE e ΓZ è comune, le due rette $\Delta\Gamma$, ΓZ sono eguali alle

due $E\Gamma$, ΓZ ciascuna a ciascuna. E la base ΔZ è eguale alla base ZE . Perciò l'angolo $\Delta\Gamma Z$ è eguale all'angolo $E\Gamma Z$, e sono adiacenti (8). Ma quando una retta posta sopra una retta fa gli angoli

adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto (T 10).

Perciò $\Delta \Gamma Z$, $Z \Gamma E$ sono retti.

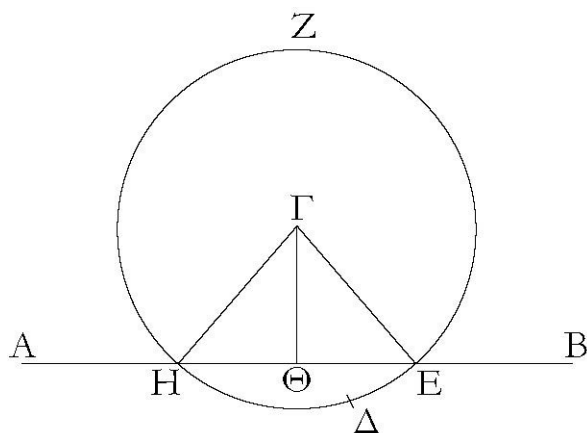
Perciò alla retta data AB dal punto dato su di essa Γ si è condotta la retta ΓZ ad angolo retto, c. d. f.

12. — *Ad una data retta infinita, da un punto dato che non è su di essa, condurre una linea retta perpendicolare.*¹⁹

19 EUCLIDE suppone tacitamente che il circolo EZH tagli la retta AB in due, ed in due soli punti. A questa supposizione si può anche dare la forma seguente: *Ogni retta condotta per un punto interno ad un circolo, lo taglia in due punti.* Infatti, poiché si è preso Δ dall'altra parte di AB , la retta $\Gamma \Delta$ taglia AB in un punto interno al circolo, ed AB è condotta per questo punto.

Tale supposizione, sebbene sia facilmente am-

Si deve dunque condurre alla retta data infinita AB , dal punto dato Γ che non è su di essa, una linea retta perpendicolare.



$\Gamma\Delta$ si descriva il circolo EZH (P3). E si divida la retta EH per metà in Θ (10), e si congiungano le

messa da chi comincia a studiare geometria, si può dedurre dalle proposizioni precedenti (come ha dimostrato HEATH, p. 273-274). Già PROCLO aveva tentato dimostrare che il circolo non incontra la retta in *piú di due* punti.

$\Gamma H, \Gamma \Theta, \Gamma E$.

Dico che alla retta data infinita AB , dal punto Γ che non è su di essa, è stata condotta la perpendicolare $\Gamma \Theta$.

Poiché infatti la $H\Theta$ è eguale alla ΘE , e $\Theta \Gamma$ è comune, le due $H\Theta, \Theta \Gamma$ sono eguali alle due $E\Theta, \Theta \Gamma$, ciascuna a ciascuna. E la base ΓH è eguale alla base ΓE . Dunque l'angolo $\Gamma \Theta H$ è eguale all'angolo $E\Theta \Gamma$ (8), e sono adiacenti. Ma quando una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto, e la retta posta si chiama perpendicolare a quella su cui è stata posta (T 10).

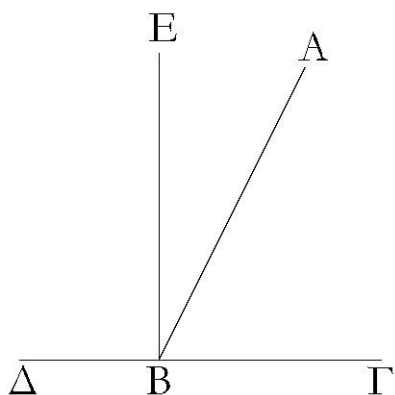
Dunque alla data retta infinita AB , dal punto dato Γ che non è su di essa, si è condotta la perpendicolare $\Gamma \Theta$, c. d. f.

13. — *Se una retta, posta sopra una retta fa*

degli angoli, farà due angoli retti, o eguali a due retti.

Infatti una retta AB posta sulla $\Gamma\Delta$ faccia gli angoli $\Gamma BA, AB\Delta$.

Dico che gli angoli $\Gamma BA, AB\Delta$ o son due retti, o sono eguali a due retti.



Poiché se ΓBA è eguale a $AB\Delta$, essi sono due retti (T10). Ma se no, dal punto B si conduca la BE , ad angolo retto alla $\Gamma\Delta$ (11); dunque $\Gamma BE, EB\Delta$ son due retti. E poichè ΓBE è eguale ai due $\Gamma BA, ABE$, si aggiunga $EB\Delta$ comune. Dunque $\Gamma BE, EB\Delta$ sono eguali ai tre $\Gamma BA, ABE, EB\Delta$ (C2).

Ed ancora, poichè ΔBA è eguale ai due $\Delta BE, EBA$, si aggiunga $AB\Gamma$, comune. Dunque $\Delta BA,$

$AB\Gamma$ sono eguali ai tre ΔBE , EBA , $AB\Gamma$ (C2). Ma si è dimostrato che anche ΓBE , $EB\Delta$ sono eguali agli stessi tre. Ma le cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro; dunque ΓBE , $EB\Delta$, sono eguali a ΔBA , $AB\Gamma$.

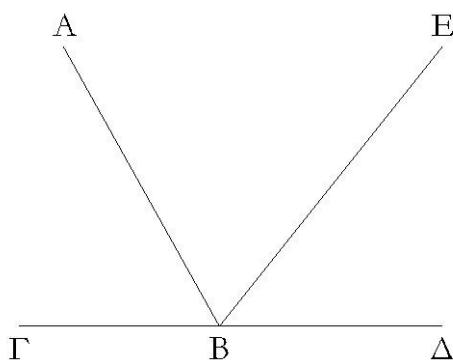
Ma ΓBE , $EB\Delta$ son due retti, dunque ΔBA , $AB\Gamma$ sono eguali a due retti.

Dunque, *se una retta posta*, etc. c. d. d.

14. — *Se con una retta, e in un punto su di essa, due rette non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti, le due rette saranno per diritto tra loro.*

Con una retta AB , e nel punto B su di essa, le due rette $B\Gamma$, $B\Delta$ che non son poste dalla stessa parte, facciano gli angoli adiacenti $AB\Gamma$, $AB\Delta$ eguali a due retti.

Dico che $B\Delta$ è per diritto alla ΓB .



Se infatti $B\Delta$ non è
per diritto alla ΓB , sia
 BE per diritto alla ΓB .

Poiché dunque la ret-
ta AB è posta sulla
 ΓBE , gli angoli $AB\Gamma$, ABE sono eguali a due retti
(13). Ma anche $AB\Gamma$, $AB\Delta$ sono eguali a due retti.
Dunque $AB\Gamma$, ABE sono eguali a $AB\Gamma$, $AB\Delta$ (C1).
Si tolga ΓBA , comune. Dunque il resto ABE è
eguale al resto $AB\Delta$ (C3), il minore al maggiore,
ciò che è impossibile.

Dunque BE non è per diritto alla ΓB . Similmen-
te si dimostrerà che nessun'altra retta lo è, oltre
la $B\Delta$.

Adunque ΓB è per diritto alla $B\Delta$.

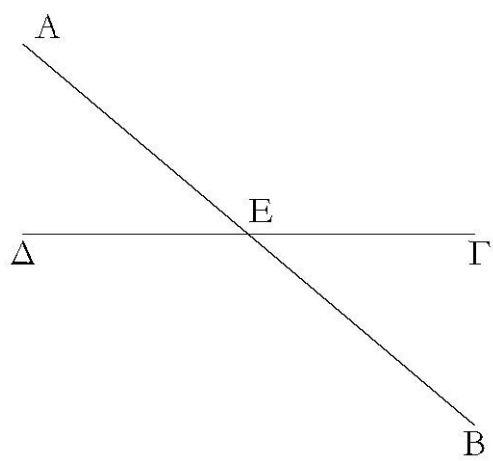
Dunque, *se con una retta*, etc. c. d. d.

15. — *Se due rette si tagliano tra di loro, fanno*

gli angoli al vertice eguali tra loro.

Infatti, le due rette AB , $\Gamma\Delta$ si tagliano tra loro nel punto E .

Dico che l'angolo $AE\Gamma$ è eguale all'angolo ΔEB , e che ΓEB è eguale a $AE\Delta$.



Poiché infatti la retta AE è posta sulla $\Delta\Gamma$, facendo gli angoli ΓEA , $AE\Delta$, i due angoli ΓEA , $AE\Delta$ sono eguali a due retti (13). Ed ancora,

poiché la retta ΔE è posta sulla retta AB facendo gli angoli $AE\Delta$, ΔEB , anche gli angoli $AE\Delta$, ΔEB sono eguali a due retti. Dunque gli angoli ΓEA , $AE\Delta$ sono eguali agli angoli $AE\Delta$, ΔEB (C1). Si tolga $AE\Delta$ comune; allora il resto ΓEA è eguale al resto $BE\Delta$. Similmente si dimostrerà che anche

$\angle FEB$, $\angle EAB$ sono eguali.

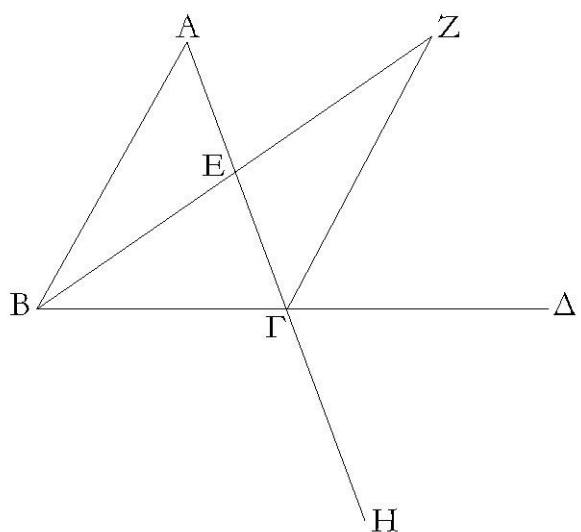
Dunque, se due rette, etc. c. d. d.

16. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti.*

Sia il triangolo $AB\Gamma$, e si prolunghi un lato $B\Gamma$ di esso fino in Δ .

Dico che l'angolo esterno $A\Gamma\Delta$ è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti $\angle B$, $\angle A$.

Si divida per metà la $A\Gamma$ in E (10), e condotta la BE , si prolunghi per diritto fino in Z , e si ponga EZ eguale alla BE , e si conduca la $Z\Gamma$, e si prolunghi la $A\Gamma$ fino in H .



Poiché dunque
 AE è eguale alla
 $E\Gamma$, e la BE alla
 EZ , le due AE ,

EB sono eguali alle due ΓE , EZ , ciascuna a ciascuna. E l'angolo AEB è eguale all'angolo $ZE\Gamma$; sono infatti opposti al vertice (15). Dunque la base $Z\Gamma$ è eguale alla base AB , ed il triangolo ABE è eguale al triangolo $ZE\Gamma$ ed i restanti angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli sottesi da lati eguali (4).

Dunque BAE è eguale a $E\Gamma Z$. Ma $E\Gamma\Delta$ è maggiore di $E\Gamma Z$ (C5), dunque $A\Gamma\Delta$ è maggiore di BAE .

Similmente, divisa per metà la $B\Gamma$ si dimostrerà che $B\Gamma H$, o ciò che è lo stesso $A\Gamma\Delta$, è maggiore di $AB\Gamma$.

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

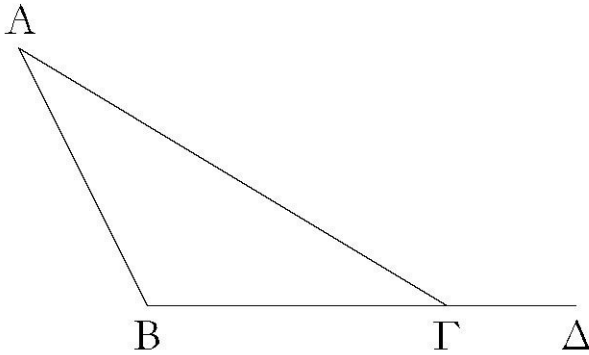
17. — *In ogni triangolo due angoli comunque presi, son minori di due retti.*²⁰

²⁰ Si osservi che questa proposizione è inversa del postulato 5, del quale si farà uso soltanto

Sia il triangolo $AB\Gamma$.

Dico che due angoli del triangolo $AB\Gamma$, comunque presi, sono minori di due retti.

Si prolunghi infatti la $B\Gamma$ in Δ .



E poiché nel
triangolo $AB\Gamma$
l'angolo $A\Gamma\Delta$ è
esterno, è mag-
giore dell'interno

dalla (29) in poi. Infatti il (P5) afferma che, se due rette, incontrate da un'altra, fanno gli angoli interni dalla stessa parte minori di due retti, esse s'incontrano. Questa (17), afferma invece, che se due rette s'incontrano, e sono incontrate da un'altra (formando così un triangolo), fanno con questa gli angoli interni dalla parte da cui s'incontrano (che son due angoli del triangolo), minori di due retti.

ed opposto $AB\Gamma$ (16).

Si aggiunga $A\Gamma B$, comune. Dunque gli angoli $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ son maggiori di $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ (C4). Ma $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ sono eguali a due retti (13).

Dunque $AB\Gamma$, $BA\Gamma$ son minori di due retti.

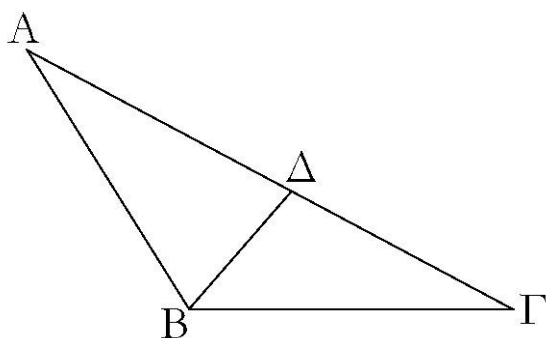
Similmente dimostreremo che anche $BA\Gamma$, $A\Gamma B$ son minori di due retti, e cosí pure $A\Gamma B$, $AB\Gamma$.

Adunque in ogni triangolo, etc., c. d. d.

18. — *In ogni triangolo, il maggior lato sottende il maggior angolo.*²¹

21 Da questa proposizione si ricava con una regola di logica pura la proposizione (6). Si ha infatti la proposizione: $a, b \in \text{Cls. } \supset: a \supset b. = \text{---} b \supset \text{---} a$ (G. PEANO, Aritmetica generale ed algebra elementare; Torino, Paravia 1902 p. 7). Ora dalla (18) si ricava:

--- (triangoli isosceli) $\supset$ --- (triangoli aventi gli angoli alla base eguali). Quindi: (triangoli aventi



Sia infatti il triangolo $AB\Gamma$ avente il lato $A\Gamma$ maggiore di AB .

Dico che anche l'angolo $AB\Gamma$ è maggiore di $B\Gamma A$.

Poiché infatti $A\Gamma$ è maggiore di AB , si ponga $A\Delta$ eguale ad AB (2) e si congiunga $B\Delta$.

Poiché nel triangolo $B\Gamma\Delta$, l'angolo $A\Delta B$ è esterno, esso è maggiore dell'interno ed opposto $\Delta\Gamma B$ (16); ed ancora l'angolo $A\Delta B$ è eguale a $AB\Delta$, poiché il lato AB è eguale ad $A\Delta$ (5); è dunque anche $AB\Delta$ maggiore di $A\Gamma B$. Dunque $AB\Gamma$ è ancor maggiore di $\Delta\Gamma B$ (C5).

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

19. — In ogni triangolo, il maggior angolo è gli angoli alla base eguali) $\supset$ (triangoli isosceli), che è la (6).

sotteso dal maggior lato.²²

Sia $AB\Gamma$ il triangolo avente l'angolo $AB\Gamma$ maggiore dell'angolo $B\Gamma A$.

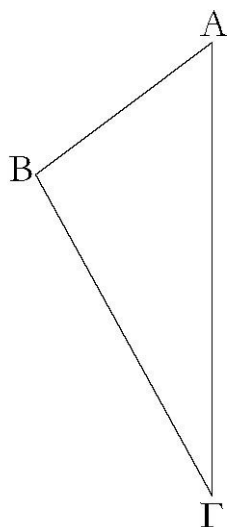
22 AUGUSTUS DE MORGAN (*Formal logic*, 1847, p. 25) secondo un passo riferito da Heath (p. 284), ha osservato che le (6) e (19) si deducono contemporaneamente dalle (5) e (18), con pure operazioni di logica. Se infatti si hanno due terne di proposizioni p, q, r ed x, y, z , tali che di ogni terna, una ed una sola sia vera, cioè sia:

$p = \neg q \neg r$, $q = \neg r \neg p$, $r = \neg p \neg q$, e così pure $x = \neg y \neg z$, etc. allora si ha:

$$x \supset p. y \supset q. x \supset r. \text{e. } p \supset x. q \supset y. r \supset z.$$

Se ora denotiamo con a, b due lati di un triangolo e con A, B gli angoli opposti; le due terne di proposizioni; $a=b, a<b, a>b$; $A=B, A<B, A>B$, soddisfanno alle condizioni sopra indicate; ed

Dico che anche il lato AG è maggiore del lato AB .



Se infatti non è, la AG è eguale o minore della AB . Ma non è AB eguale ad AG poiché allora sarebbe anche ABG eguale a AGB (5). E nemmeno è AG minore di AB , poiché allora sarebbe ABG minore di AGB (18), il che

non è. Dunque non è AG minore di AB . Ma si è dimostrato che non è neppure eguale, dunque AG è maggiore di AB .

inoltre:

$$a=b. \text{ } \circlearrowleft. \text{ } A=B \text{ (5); } a<b. \text{ } \circlearrowleft. \text{ } A<B \text{ (18);}$$

$$a>b. \text{ } \circlearrowleft. \text{ } A>B \text{ (18).}$$

perciò anche:

$$A=B. \text{ } \circlearrowleft. \text{ } a=b \text{ (6); } A<B. \text{ } \circlearrowleft. \text{ } a<b. \text{ (19);}$$

$$A>B. \text{ } \circlearrowleft. \text{ } a>b \text{ (19).}$$

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

20. — *In ogni triangolo, due lati sono maggiori del restante, comunque siano presi.*²³

23 Secondo uno scoliaste greco (EUCLIDE, ed HEIBERG, vol. V p. 156), gli Epicurei dicevano inutile questo teorema (20) osservando che era evidente anche ad un asino, e non aveva bisogno di nessuna dimostrazione.

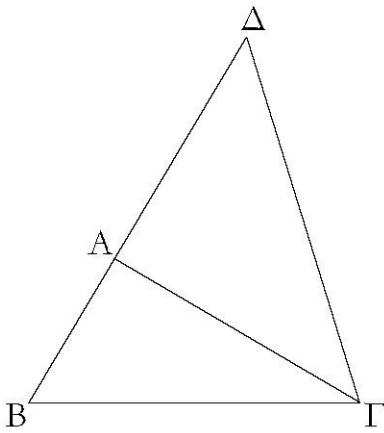
Archimede (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* lib. I.) comincia col postulato «La retta è la minima di tutte le linee contermini». (*Λαμβάνω δὲ ταῦτα· Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθείαν*).

La dimostrazione di Euclide, assai elegante, ha lo scopo di enunciare una condizione necessaria perchè tre rette formino un triangolo (22). Essa serve inoltre a mostrare che il numero degli as-

Sia infatti il triangolo $AB\Gamma$.

Dico che due lati son maggiori del restante comunque siano presi, cioè $BA, A\Gamma$ maggiori di $B\Gamma$; $AB, B\Gamma$ maggiori di $A\Gamma$; $B\Gamma, \Gamma A$ maggiori di AB .

Si prolunghi infatti la BA verso il punto Δ , e si ponga $A\Delta$ eguale a ΓA , e si congiunga la $\Delta\Gamma$.



Poiché dunque ΔA è eguale ad $A\Gamma$ l'angolo $A\Delta\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma\Delta$ (5). Dunque $B\Gamma\Delta$ è maggiore di $A\Delta\Gamma$. E poiché il triangolo $A\Gamma B$ ha

l'angolo $B\Gamma\Delta$ maggiore dell'angolo $B\Delta\Gamma$, ed al maggior angolo sottende il maggior lato (19), la ΔB è dunque maggiore della $B\Gamma$. Ma ΔA è eguale a $A\Gamma$; dunque le $BA, A\Gamma$ son maggiori della $B\Gamma$. Si-

sioni da cui si possono dedurre le verità della geometria è piccolo.

milmente dimostreremo che AB , $B\Gamma$ son maggiori di $A\Gamma$, e che $B\Gamma$, ΓA son maggiori di AB .

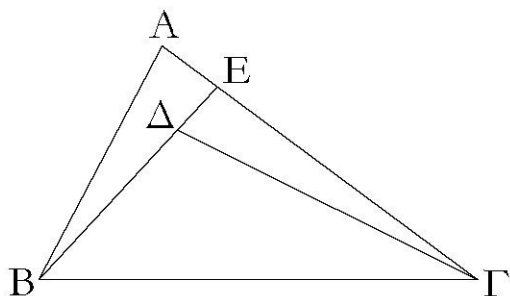
Dunque, in ogni triangolo, etc. c. d. d.

21. — *Se in un triangolo, dagli estremi di un lato si congiungono due rette internamente, le due rette congiunte saranno minori dei due restanti lati del triangolo, e comprenderanno un angolo maggiore.*

Infatti, nel triangolo $AB\Gamma$ dagli estremi B , Γ di un lato $B\Gamma$, si congiungano due rette internamente $B\Delta$, $\Delta\Gamma$.

Dico che le $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ sono minori dei due restanti lati del triangolo BA , $A\Gamma$ ma che comprendono un angolo $B\Delta\Gamma$ maggiore dell'angolo $BA\Gamma$.

Si prolunghi infatti la $B\Delta$ in E . E poich  in ogni



triangolo due lati son
maggiori del restante

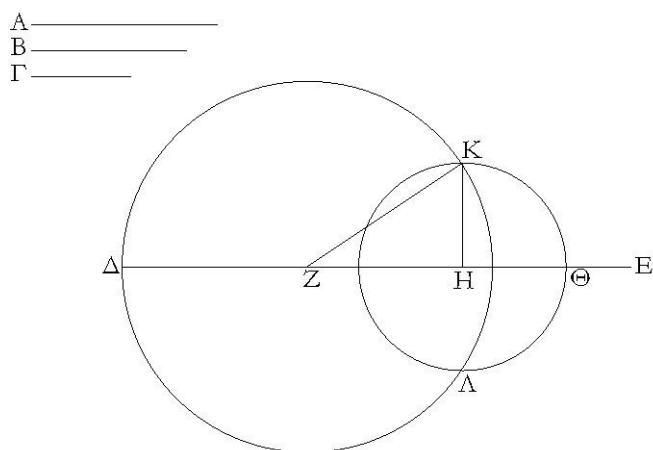
(20), i due lati AB , AE del triangolo ABE son maggiori di BE ; si aggiunga EF , comune; dunque BA , AF son maggiori di BE , EF (C2). Ancora, i due lati FE , $E\Delta$ del triangolo $FE\Delta$ son maggiori di $F\Delta$; si aggiunga AB , comune; dunque FE , EB son maggiori di $F\Delta$, ΔB . Ma BE , EF si erano dimostrate minori di BA , AF ; dunque BA , AF sono molto maggiori di $B\Delta$, ΔF .

Ancora, poiché in ogni triangolo, l'angolo esterno è maggiore di un interno ed opposto (16), dunque nel triangolo $F\Delta E$ l'angolo esterno $B\Delta F$ è maggiore di $FE\Delta$. E per la stessa ragione anche nel triangolo ABE l'angolo FEB è maggiore di BAF . Ma si è dimostrato che $B\Delta F$ è maggiore di FEB . Dunque $B\Delta F$ è molto maggiore di BAF .

Dunque, *se in un triangolo*, etc., c. d. d.

22. — *Con tre rette, che sono eguali a tre date,*

costruire un triangolo; due di esse devono naturalmente esser maggiori della restante, comunque si prendano [20].²⁴



Siano A, B, Γ le tre rette date, delle quali due
 24 Euclide non dimostra che i due circoli si tagliano in K . Come nella (1), egli ammette come evidente che *se un circolo ha un punto esterno ad un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia*. Non è da escludersi che sotto questa o sotto altra forma, una tale proprietà del circolo si sia potuta trovare nella primitiva redazione dei postulati o delle definizioni.

son maggiori della restante, comunque prese, A , B maggiori di Γ ; A , Γ di B ; e B , Γ di A . Si deve dunque costruire un triangolo con tre rette eguali alle A , B , Γ .

Si prenda una retta ΔE terminata in Δ e infinita verso E e si ponga ΔZ eguale ad A , ZH eguale a B , ed $H\Theta$ eguale a Γ . Con centro Z e con distanza $Z\Delta$ si descriva il circolo $\Delta K\Lambda$; ed ancora con centro H e con distanza $H\Theta$ si descriva il circolo $K\Lambda\Theta$, e si conducano le KZ , KH .

Dico che con tre rette eguali alle A , B , Γ si è costruito il triangolo KZH .

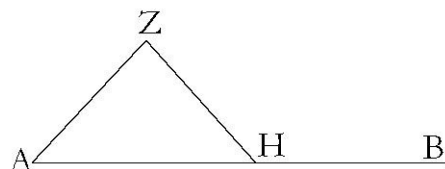
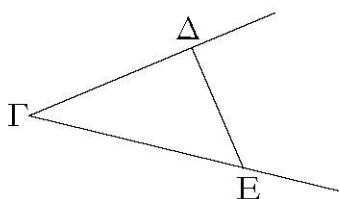
Poiché infatti il punto Z è centro del circolo $\Delta K\Lambda$, la $Z\Delta$ è eguale alla ZK . Ma la $Z\Delta$ è eguale ad A ; dunque anche la ZK è eguale ad A (C1). Ancora, poiché il punto H è centro del circolo $\Lambda K\Theta$, la $H\Theta$ è eguale alla HK . Ma la $H\Theta$ è eguale a Γ ; dunque anche la KH è eguale a Γ . Ma anche

la ZH è eguale a B . Dunque le tre rette KZ , ZH , HK sono eguali alle tre A , B , Γ .

Dunque con le tre rette KZ , ZH , HK , che sono eguali alle tre rette date A , B , Γ , si è costruito il triangolo KZH ; c. d. f.

23. — *Su una retta data ed in un punto dato in essa, costruire un angolo rettilineo eguale ad un angolo rettilineo dato.*

Sia AB la retta data, ed A il punto dato in essa, e sia $\Delta\Gamma E$ l'angolo rettilineo dato.



Si deve dunque sulla retta data AB e nel punto dato in essa A , costruire un angolo rettilineo eguale a $\Delta\Gamma E$.

Si prendano su ognuna delle due $\Gamma\Delta$, ΓE due punti a caso Δ , E e

si congiunga la ΔE . E con tre rette, le quali siano eguali alle tre $\Gamma\Delta$, ΔE , ΓE si costruisca il triangolo AZH , cosicch  sia $\Gamma\Delta$ eguale ad AZ , ΓE ad AH , e ΔE a ZH (22).

Poich  le due $\Delta\Gamma$, ΓE sono eguali alle due ZA , AH ciascuna a ciascuna, e la base ΔE   eguale alla base ZH , l'angolo $\Delta\Gamma E$   eguale a ZAH (8).

Dunque su la retta data AB e nel punto dato in essa A , si   costruito l'angolo rettilineo ZAH , eguale all'angolo rettilineo dato $\Delta\Gamma E$; c. d. f.

24. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, ma hanno un angolo maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette eguali, avranno anche la base maggiore della base.*²⁵

25 L'enunciato di questo teorema (e cos  pure quello del teorema successivo),   poco chiaro, quando si traduce alla lettera. Una traduzione li-

Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ aventi i due lati AB , $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE , ΔZ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE , ed $A\Gamma$ a ΔZ ; e l'angolo in A maggiore dell'angolo in Δ .

bera potrebbe essere questa:

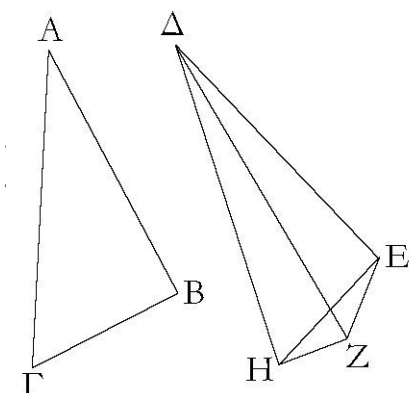
24. Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ma l'angolo compreso dai lati eguali in uno dei due triangoli, è maggiore dell'angolo corrispondente dell'altro triangolo, anche la base del primo triangolo sarà maggiore della base dell'altro.

EUCLIDE svolge soltanto un caso, quello in cui Z cade al di fuori del triangolo ΔEH . Gli altri due casi (in cui Z cade sulla HE , ovvero dentro il triangolo ΔEH) hanno una dimostrazione analoga, ma alquanto piú semplice (svolta da Proclo).

SIMSON ha osservato che se si chiama ΔE il piú corto dei due lati ΔE , ΔZ , allora necessariamente

Dico che anche la base BF è maggiore della base EZ .

Poiché infatti l'angolo $BA\Gamma$ è maggiore dell'angolo $E\Delta Z$, sulla retta ΔE e nel punto in essa Δ , si costruisca l'angolo $E\Delta H$ eguale all'angolo $BA\Gamma$ e si ponga ΔH eguale a ciascuna delle due $A\Gamma, \Delta Z$, e si congiungano le EH, ZH .



Poiché dunque AB è eguale a ΔE ed $A\Gamma$ a ΔH , o ΔEH e si ha il solo caso ΔE . Si prolunghi infatti se occorre ΔZ , fino ad incontrare EH in K .

$$\text{allora } \Delta KH > \Delta EK \quad (16)$$

$$\Delta EK \geq \Delta HK \quad (18)$$

$$\text{quindi } \Delta KH > \Delta HK \text{ quindi } \Delta H > \Delta K \quad (19)$$

e poichè $\Delta Z = \Delta H$, $\Delta K < \Delta Z$, quindi Z cade fuori di ΔEK c. d. d.

le due BA , AF sono eguali alle due $E\Delta$, ΔH ciascuna a ciascuna, e l'angolo BAF è eguale all'angolo $E\Delta H$. Dunque la base BF è eguale alla base EH (4). Ed ancora, poiché ΔZ è eguale a ΔH , l'angolo ΔHZ è eguale all'angolo ΔZH (5).

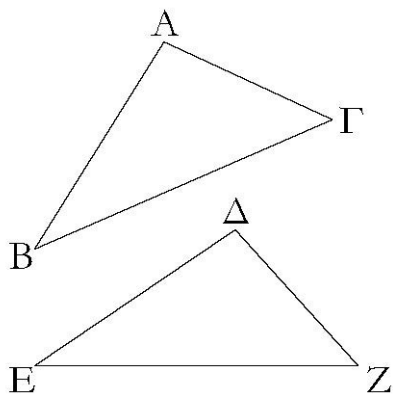
Dunque ΔZH è maggiore di ΔHZ (C5). Dunque EZH è molto maggiore di ΔHZ (C5). E poiché il triangolo EZH ha l'angolo EZH maggiore dell'angolo ΔHZ , e al maggior angolo sottende il maggior lato (19), è dunque il lato EH maggiore di EZ . Ma EH è eguale a BF ; dunque BF è maggiore di EZ .

Dunque, *se due triangoli, etc., c. d. d.*

25. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base maggiore della base, anche un angolo, sarà maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette*

eguali.

Siano due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ , aventi i due lati AB , $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE , ΔZ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE ed $A\Gamma$ eguale a ΔZ ; e la base $B\Gamma$ sia maggiore della base EZ .



Dico che anche l'angolo $BA\Gamma$ è maggiore dell'angolo $E\Delta Z$.

Se infatti non è [maggiore], o è eguale o minore ad esso. Ma non è $BA\Gamma$ eguale a $E\Delta Z$, poiché allora anche la base $B\Gamma$ sarebbe eguale alla base EZ (4). Ma non è. Dunque l'angolo $BA\Gamma$ non è eguale a $E\Delta Z$. E nemmeno è $BA\Gamma$ minore di $E\Delta Z$. Poiché allora anche la base $B\Gamma$ sarebbe minore della base EZ (24). Ma non è. Dunque l'angolo $BA\Gamma$ non è minore di $E\Delta Z$. Ma si è mostrato che

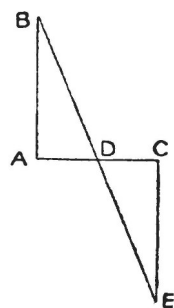
non è nemmeno eguale. Dunque $BA\Gamma$ è maggiore di $E\Delta Z$.

Dunque, se due triangoli, etc., c. d. d.

26. — *Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, o quello tra gli angoli eguali, o uno di quelli sottendenti gli angoli eguali, avranno anche eguali i restanti lati ai restanti lati [ciascuno a ciascuno], ed il restante angolo al restante angolo.*²⁶

26 Questa proposizione, come pure la (15) sono attribuite a TALETE, da PROCLO. Secondo la ricostruzione di TANNERY, TALETE il quale secondo PROCLO «avrebbe, per mezzo di questo teorema, trovato il modo di misurare la distanza di una nave in mare, dalla riva», avrebbe fatto così: Fissati sulla spiaggia due punti A, C il loro punto medio D e le due direzioni AB, CE perpendicolari alla

Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ
 aventi i due angoli $AB\Gamma$, $B\Gamma A$
 eguali ai due ΔEZ , $EZ\Delta$ ciascuno
 a ciascuno, $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ , e



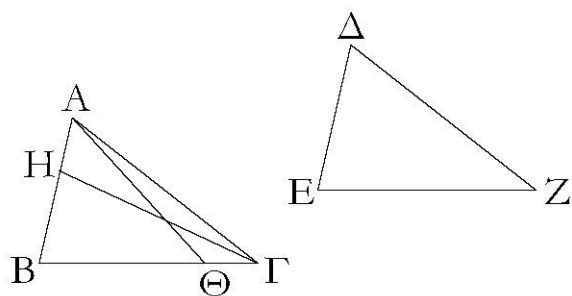
$B\Gamma A$ a $EZ\Delta$. Ed abbiano un lato eguale ad un lato, e dapprima quello compreso tra gli angoli eguali, $B\Gamma$ eguale a EZ .

Dico che avranno anche i restanti lati eguali ciascuno a ciascuno, AB a ΔE , e $A\Gamma$ a ΔZ ; e il restante angolo $BA\Gamma$ eguale al restante angolo $E\Delta Z$.

Se infatti AB non è eguale a ΔE , uno di essi è AC, quando in A si osservi la nave B che fa l'angolo BAC retto, e da D si osserva che BDE sono in linea retta, la distanza CE che si può poi misurare sul suolo, è uguale alla AB, perché per la (15) $ADB=CDE$, e per la (26) $ABD=CED$, quindi $AB=CE$.

maggiore. Sia maggiore AB e si ponga BH eguale a ΔE , e si congiunga la $H\Gamma$.

Poiché dunque BH è eguale a ΔE , e $B\Gamma$ a EZ ,



le due BH , $B\Gamma$
sono eguali alle
due ΔE , EZ cia-
scuna a ciascu-
na; e l'angolo

$HB\Gamma$ è eguale all'angolo ΔEZ . Dunque la base $H\Gamma$ è eguale alla base ΔZ , e il triangolo $HB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ , ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali (4). Dunque l'angolo $H\Gamma B$ sarà eguale all'angolo ΔZE . Ma ΔZE si è supposto eguale a $B\Gamma A$, dunque $B\Gamma H$ è eguale a $B\Gamma A$ (C1), il minore al maggiore, il che è impossibile (C5). Dunque AB non è diseguale a ΔE ; dunque è eguale. Ma $B\Gamma$ è eguale ad EZ . Dunque le due

AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due ΔE , EZ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo ΔEZ . Dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base ΔZ , ed il restante angolo $BA\Gamma$ è eguale al restante angolo $E\Delta Z$ (4).

Siano ora invece eguali i lati sottendenti angoli eguali, come AB a ΔE . Dico che i restanti lati saranno eguali ai restanti lati $A\Gamma$ a ΔZ , e $B\Gamma$ ad EZ , e che anche il restante angolo $BA\Gamma$ è eguale al restante angolo $E\Delta Z$.

Se infatti $B\Gamma$ non è eguale ad EZ , uno di essi è maggiore. Sia maggiore, se è possibile, $B\Gamma$, e si ponga $B\Theta$ eguale ad EZ , e si congiunga la $A\Theta$.

E poiché $B\Theta$ è eguale ad EZ , e AB a ΔE , le due AB , $B\Theta$ sono eguali alle due ΔE , EZ , ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base $A\Theta$ è eguale alla base AZ , ed il triangolo $AB\Theta$ è eguale al triangolo ΔEZ , ed i re-

stanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo $B\theta A$ è eguale all'angolo $EZ\Delta$. Ma $EZ\Delta$ è eguale a $B\Gamma A$. Dunque l'angolo esterno $B\theta A$ del triangolo $A\theta\Gamma$ è eguale all'interno ed opposto $B\Gamma A$; il che è impossibile (16). Dunque $B\Gamma$ non è diseguale a EZ ; dunque è eguale. Dunque le due AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due ΔE , EZ , ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base ΔZ , e il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ , ed il restante angolo $BA\Gamma$ è eguale al restante angolo $E\Delta Z$.

Dunque, se *due triangoli*, etc., c. d. d.

27. — *Se una retta cadendo su due rette fa gli angoli alterni eguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro.*²⁷

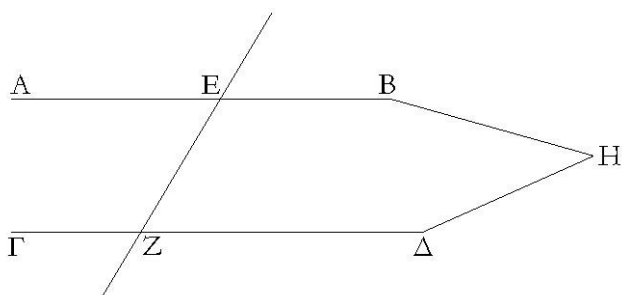
27 27. AUGUSTUS DE MORGAN ha osservato (*Companion to the almanac for 1849*, p. 8) che la

Infatti la retta EZ cadendo sulle due rette AB , $\Gamma\Delta$ formi gli angoli alterni AEZ , $EZ\Delta$ eguali tra loro. Dico che AB è parallela a $\Gamma\Delta$.

(27) è una forma diversa della (16). Si passa dall'una all'altra con la regola di logica: $a, b \in \text{Cls.}$
 $\circ: a \circ b \text{ .}=\text{. } \blacksquare b \circ \blacksquare a$ (cfr. nota alla [18]).

Se con a si intende la classe delle coppie di rette che fanno un triangolo con una trasversale, e con b la classe delle coppie di rette che fanno con una trasversale i due angoli alterni (cioè interno ed esterno) non eguali tra loro, allora la (16) ha la forma $a \circ b$, e la (27) la forma: $\blacksquare b \circ \blacksquare a$. Il ragionamento di Euclide è pure, in fondo lo stesso.

Questa nuova forma data da Euclide alla (16) ha lo scopo di collegare le proposizioni seguenti (27)–(34) che trattano delle proprietà delle paral-



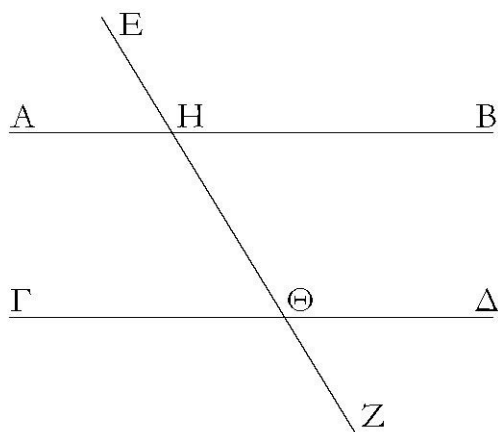
Se infatti non è, prolungate le AB , $\Gamma\Delta$ si incontreranno dalla parte B , Δ ovvero dalla parte A , Γ . Si prolunghino e si incontrino dalla parte B , Δ in H . L'angolo esterno AEZ del triangolo HEZ è eguale all'interno ed opposto EZH , il che è impossibile (16). Dunque le AB , $\Gamma\Delta$ prolungate dalla parte B , Δ non si incontreranno. Allo stesso modo si dimostrerà che nemmeno si incontrano dalla parte A , Γ . Ma se due rette non s'incontrano da nessuna delle due parti son parallele (T23). Dunque AB è parallela a $\Gamma\Delta$.

Dunque; *se una retta cadendo*, etc. c. d. d.

lele, con quelle che precedono le quali trattavano delle proprietà dei triangoli.

28. *Se una retta cadendo su due rette fa l'angolo esterno eguale all'interno ed opposto dalla stessa parte, ovvero i due interni dalla stessa parte eguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro.*

Infatti, la retta EZ cadendo sulle due rette AB , $\Gamma\Delta$ faccia l'angolo esterno EHB eguale all'interno ed opposto $H\Theta\Delta$, ovvero gli angoli interni dalla stessa parte $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ eguali a due retti. Dico che la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$.



Poiché infatti EHB è eguale a $H\Theta\Delta$, e poiché EHB è eguale ad $AH\Theta$ (15), anche $AH\Theta$ è eguale a

$H\Theta\Delta$ (C1), e sono alterni. Quindi AB è parallela a

$\Gamma\Delta$ (27).

Ancora, poiché $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ sono eguali a due retti, e poiché $AH\Theta$, $BH\Theta$ sono anche eguali a due retti, (13), saranno anche $AH\Theta$, $BH\Theta$ eguali a $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C1). Si tolga $BH\Theta$ comune. Il resto $AH\Theta$ è allora eguale al resto $H\Theta\Delta$ (C3), e sono alterni, quindi la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$ (27).

Dunque se *una retta cadendo*, etc. c. d. d.

29. — *Una retta che cade su due rette parallele fa gli angoli alterni eguali tra loro, l'angolo esterno eguale all'interno ed opposto, e gli angoli interni dalla stessa parte eguali a due retti.*²⁸

²⁸ Come si è già osservato, questa prop. (29) è la prima in cui si adopera il postulato (P5).

A chi ben consideri l'opera di Euclide, la formulazione del (P5) appare semplice ed elegante (cfr. la nota alla [17]). Per Euclide, due rette tagliate da una terza appaiono come una figura

Infatti sulle rette parallele AB , $\Gamma\Delta$ cada la retta EZ . Dico che essa fa gli angoli alterni $AH\Theta$, $H\Theta\Delta$ eguali, e l'angolo esterno EHB eguale all'interno ed opposto $H\Theta\Delta$, e gli interni dalla stessa parte

geometrica analoga ad un triangolo (cfr. la nota a [T22], pag. 9).

I geometri di ogni epoca si preoccuparono, di sostituire al (P5) qualche altro, il quale, assieme alle (1)–(28) permettesse di dimostrare la (29) e le seguenti.

Ecco alcune delle proposizioni piú notevoli che sono state proposte per sostituire il (P5).

1. *Due linee rette che si incontrano, non possono essere parallele ad una stessa retta* (PROCLO), (È equivalente alla [30] di Euclide).

2. *Esiste un triangolo nel quale la somma degli angoli è eguale a due retti* (LEGENDRE, Mém. de l'Acad. des Sc. XII, p. 367: *Réflexions sur dif-*

$BH\theta$, $H\theta\Delta$ eguali a due retti.

Infatti se $AH\theta$ non è eguale a $H\theta\Delta$, uno di essi è maggiore. Sia maggiore $AH\theta$. Si aggiunga $BH\theta$ comune. Allora $AH\theta$, $BH\theta$ son maggiori di

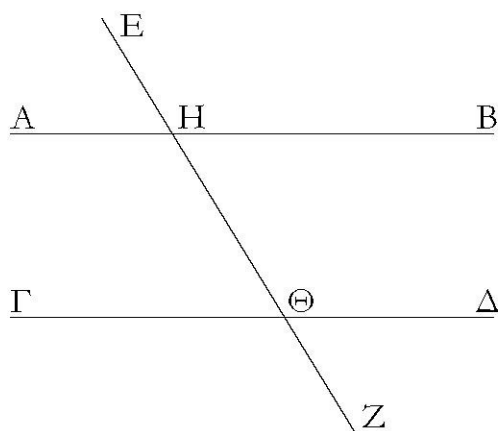
férentes manières de démontrer la théorie des parallèles).

3. *Esistono due triangoli diseguali, aventi gli angoli eguali.* (SACCHERI, nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) ovvero nella versione italiana, *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*, di G. BOCCARDINI, Milano, Hoepli, 1904).

4. *È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualsivoglia area data* (GAUSS, lettera a W. BOLYAI, 1799).

Una interessante esposizione di questi ed altri metodi si trova nella versione di Euclide di HEATH, vol. I pagine 202-220. Cfr. anche la nota alla suc-

$BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C2). Ma $AH\Theta$, $BH\Theta$ sono eguali a due retti (13), dunque $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ son minori di due retti. Ma due rette che fanno gli angoli interni minori di due retti, prolungate all'infinito, si incontrano (P5). Dunque AB , $\Gamma\Delta$ prolungate all'infinito, si incontreranno; ma non si incontrano perché si son supposte parallele: Non è dunque $AH\Theta$ diseguale a $AH\Theta$. È dunque eguale.



Ma anche $AH\Theta$ è eguale a EHB (15).

Dunque EHB è eguale a $H\Theta\Delta$ (C1).

Si aggiunga $BH\Theta$ comune. Dunque EHB ,

$BH\Theta$ sono eguali a $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C 2). Ma EHB , $BH\Theta$ sono eguali a due retti (13). Dunque anche

cessiva (32), e BONOLA, *La Geometria non Euclidea*, Bologna, Zanichelli, 1903.

$BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ sono eguali a due retti.

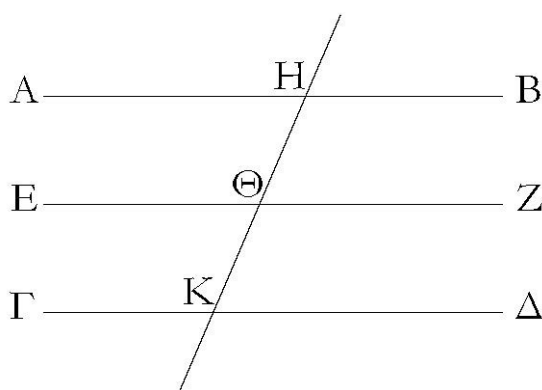
Dunque *una retta che cade su due rette parallele*, etc. c. d. d.

30. — *Le parallele ad una stessa retta sono anche parallele tra loro.*²⁹

²⁹ Euclide non spiega come si possa costruire la HK , la quale incontri le altre tre rette.

La proposizione sembra alterata, o monca, il che può anche sospettarsi dal fatto che essa è priva della solita conclusione. Forse Euclide deduceva dal (P5) che la $H\Theta$ incontrando la EZ doveva anche incontrare la parallela $\Gamma\Delta$? Ovvero preso a caso H su AB , e K su $\Gamma\Delta$ osservava che essendo EZ interna alle due AB , $\Gamma\Delta$, la HK doveva necessariamente tagliarla in Θ ?

A. DE MORGAN ha osservato (*Compan. to the almanac for 1849*, p. 8 che la (30) è logicamente equivalente all'altra: *Due rette che si tagliano non*



Sia ognuna delle
 AB , $\Gamma\Delta$ parallela alla
 EZ ; dico che la AB
 è parallela alla $\Gamma\Delta$.
 Infatti, le incontri

la retta HK .

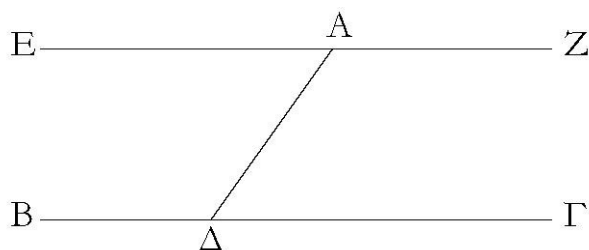
Poiché HK incontra le rette parallele AB , EZ
 l'angolo AHK è eguale all'angolo $H\Theta Z$ (29). E
 poiché ancora HK incontra le parallele EZ , $\Gamma\Delta$,
 l'angolo $H\Theta Z$ è eguale all'angolo HKA (29). Ma si
 è dimostrato che AHK è eguale ad $H\Theta\Delta$; dunque
 anche AHK è eguale a $HK\Delta$ (C1), e sono alterni.

Dunque AB è parallela a $\Gamma\Delta$ (27). c. d. d.

31. *Per un punto dato condurre una linea retta
 parallela ad una retta data.*³⁰
possono esser parallele entrambe ad un'altra ret-
ta.

30 PROCLO aveva osservato che Euclide pone

Sia A il punto dato, e sia $B\Gamma$ la retta data. Si deve dunque per il punto A condurre una linea retta parallela alla retta $B\Gamma$.



Si prenda sulla $B\Gamma$ un punto Δ a caso, e si congiunga la $A\Delta$; e

sulla retta ΔA e sul punto A di essa si costruisca l'angolo ΔAE eguale all'angolo $A\Delta\Gamma$ (23), e si prolunghi per diritto alla EA , la retta AZ .

E poiché la retta $A\Delta$ cadendo sulle due rette $B\Gamma$, EZ fa gli angoli alterni $EA\Delta$, $A\Delta\Gamma$ eguali tra loro, dunque la EAZ è parallela alla $B\Gamma$ (27).

Dunque dal punto dato A , è stata condotta la li-

il problema (31) soltanto dopo aver dimostrato la (30), dalla quale è facile concludere che da un punto ad una retta si può condurre una sola parallela.

nea retta EAZ parallela alla retta data $B\Gamma$. c. d. f.

32. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è eguale ai due interni ed opposti, ed i tre angoli interni al triangolo sono eguali a due retti.*³¹

31 Questa proposizione è spesso citata da ARISTOTELE, come esempio di una verità accettata da tutti (*Anal. Post.* I, 24, 85 C 5; *ibid.* 85 C 11; *Metaph.* 1051 a 24). Questo passo della *Metafisica* di ARISTOTELE, come è stato osservato da HEIBERG, si riferisce alla dimostrazione qui data da EUCLIDE; quindi non solo la proposizione, ma anche la dimostrazione sono anteriori ad EUCLIDE.

I Pitagorici, secondo quanto riferisce PROCLO (p. 379) dimostravano questo teorema conducendo invece dal vertice A una parallela alla base $B\Gamma$, ed osservando che gli altri due angoli così formati

Sia il triangolo $AB\Gamma$ e si prolunghi un suo lato $B\Gamma$ in Δ . Dico che l'angolo esterno $A\Gamma\Delta$ è eguale ai due interni ed opposti ΓAB , $AB\Gamma$, e che i tre angoli interni del triangolo $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB sono attorno al vertice sono eguali agli altri due angoli del triangolo perché alterni ed interni etc.

Come TARTAGLIA osserva nel suo commento a questa proposizione, è facile estenderla ai poligoni semplici, o stellati. Così ad es. *in un pentagono stellato la somma dei cinque angoli A , B , C , D , E è eguale a due angoli retti*. Infatti l'angolo AGF , esterno del triangolo EGC , è eguale ai due interni ed opposti E , C ; e l'angolo AFG esterno del triangolo DBF è eguale ai due interni ed opposti B , D , dunque, etc.

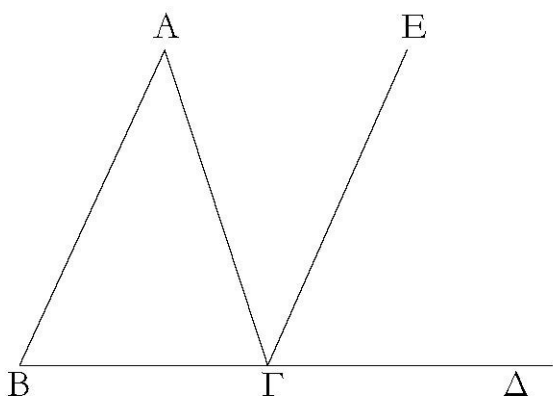
Questo pentagono stellato, o *pentagramma* era il segno di riconoscimento dei Pitagorici.

La (32) dipende dalla (29), la quale a sua volta

eguali a due retti.

Si conduca infatti dal punto Γ alla AB , la retta parallela ΓE .

E poiché AB è parallela a ΓE , e su di esse cade la $A\Gamma$, gli angoli alterni $BA\Gamma$, $A\Gamma E$ sono eguali tra



loro (29). Anco-

ito dimostrato nel

te la (P5), la (32)

tendosi ai termini

dare un senso

tale che siano verificate le proposiz. (1)-(28), e

non siano invece verificati né la (P5), né la (32).

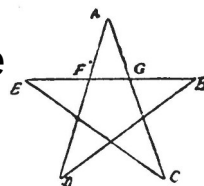
(BELTRAMI, *Giornale di Matematiche*, Napoli,

1868).

Senza far uso della (P5), ma soltanto delle nozioni precedenti, si giunge appena a dimostrare la (16) e la (17), dalle quali si deduce soltanto che la (32) è *possibile*.

ra, poiché AB è parallela a ΓE , e su di esse cade la $B\Delta$, l'angolo esterno $E\Gamma\Delta$ è eguale all'angolo interno ed opposto $AB\Gamma$ (29). Ma si era già dimostrato che $A\Gamma E$ è eguale a $BA\Gamma$. Dunque tutto l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale ai due interni ed opposti $BA\Gamma, AB\Gamma$ (C2).

Si aggiunga l'angolo comune $A\Gamma B$; allora i due angoli $A\Gamma\Delta, A\Gamma B$ sono eguali ai tre $AB\Gamma, B\Gamma A, \Gamma AB$ (C2). Ma i due angoli $A\Gamma\Delta, A\Gamma B$ sono eguali a due retti (13). Dunque anche i tre angoli $A\Gamma B, \Gamma BA, \Gamma AB$ sono eguali a due retti (C1).

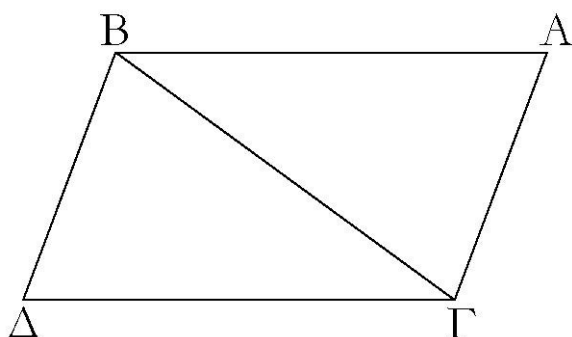


Dunque *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

33. — *Le rette congiungenti dalla stessa parte rette eguali e parallele sono anch'esse eguali e parallele.*³²

32 Questa proposizione, come Proclo ha osservato, collega la teoria delle parallele con quel-

Siano le AB , $\Gamma\Delta$ eguali e parallele, e le congiungano dalla stessa parte le $A\Gamma$, $B\Delta$. Dico che anche $A\Gamma$, $B\Delta$ sono eguali e parallele.



Si conduca la $B\Gamma$.

E poiché la AB è parallela alla ΓA , e la $B\Gamma$

le incontra, gli angoli alterni $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ sono eguali tra loro (29). E poiché AB è eguale a $\Gamma\Delta$, e la $B\Gamma$ è comune, le due AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$; e l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$; dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base $B\Delta$, ed il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $B\Gamma\Delta$, ed i restanti

la dei parallelogrammi. Essa definisce implicitamente che cosa sia un *parallelogrammo*. A partire dalla proposizione successiva, Euclide adopera questa nuova parola senza altri schiarimenti.

angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo $A\Gamma B$ è eguale all'angolo $\Gamma B\Delta$ (4). E poiché la retta $B\Gamma$ cadendo sulle due rette $A\Gamma$, $B\Delta$ fa gli angoli alterni eguali tra loro, è dunque la $A\Gamma$ parallela alla $B\Delta$ (27). Ma sì è già dimostrato che le è anche eguale.

Dunque, *le rette congiungenti*, etc. c. d. d.

34. — *I lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo son eguali tra loro, e il diametro lo divide per metà.*³³

³³ Euclide avrebbe potuto abbreviare la seconda parte di questa dimostrazione osservando che la (26) citata in principio già permette di concludere l'eguaglianza dei due triangoli $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$. Si osservi però che questa conseguenza si trae dalla dimostrazione, ma non dal solo enunciato della (26). Perciò Euclide forse ha preferito ricorrere al-

Sia lo spazio parallelogrammo $A\Gamma\Delta B$, ed il suo diametro $B\Gamma$. Dico che i lati e gli angoli opposti del parallelogramma $A\Gamma\Delta B$ sono eguali tra loro, e che il diametro lo divide per metà.

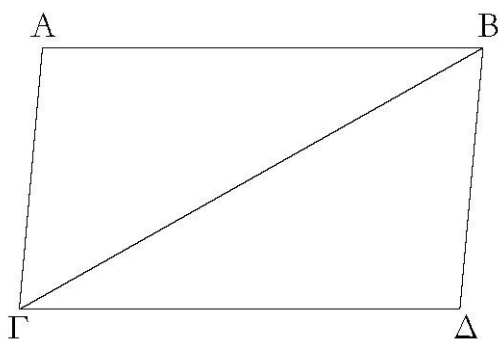
la (4).

Il matematico arabo AN-NAIRĪZĪ, adoperando le (33) e (34), ha dato una elegante costruzione della trisezione di una retta (*Anaritii in decem libros priores elementor. Euclidis comm. ex interpretatione Gherardi cremonensis*, ed. Curtze, Leipzig, Teubner, 1899, p. 74). Egli conduce da parti opposte della retta data AB da trisecare, dagli estremi A, B , due perpendicolari eguali tra loro AC, BD . Bisecata ognuna di queste nei punti E, F , congiunge ED, CF . I due punti d'intersezione G, H di queste congiungenti colla AB , risolvono il problema.

La dimostrazione è facile. Si conduce perciò da

Poiché infatti la AB è parallela a $\Gamma\Delta$, e la retta $B\Gamma$ cade su di esse, gli angoli alterni $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ sono eguali tra loro (29). E ancora, poiché $A\Gamma$ è parallela a $B\Delta$, e $B\Gamma$ cade su di esse, gli angoli alterni $A\Gamma B$, $\Gamma B\Delta$ sono eguali tra loro (29).

Dunque i due triangoli $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ hanno i due



angoli $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ eguali ai due $B\Gamma\Delta$, $\Gamma B\Delta$ ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato,

H la perpendicolare, etc.

Con una costruzione analoga si può dividere una retta in quante si vogliano parti eguali.

E però più semplice adoperare per la soluzione di questo problema la teoria delle proporzioni. Così fa Euclide nella prop. (9) del libro sesto. Cfr. la nota alla (10).

quello tra gli angoli eguali, la $B\Gamma$ comune. Perciò anche i restanti lati saranno eguali ai restanti lati, ciascuno a ciascuno, ed il restante angolo, al restante angolo (26). Dunque la AB è eguale alla $\Gamma\Delta$, e la $A\Gamma$ a $B\Delta$, ed ancora l'angolo $BA\Gamma$ eguale a $\Gamma\Delta B$. Ma poiché l'angolo $AB\Gamma$ è eguale a $B\Gamma\Delta$ e $\Gamma B\Delta$ è eguale a $A\Gamma B$, è dunque tutto $AB\Delta$ eguale a tutto $A\Gamma\Delta$ (C2). Ma già si era dimostrato che $BA\Gamma$ è eguale a $\Gamma\Delta B$.

Dunque i lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo sono eguali tra loro.

Dico poi, che un diametro lo divide per metà. Poiché infatti AB è eguale a $\Gamma\Delta$, e $B\Gamma$ è comune, le due AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ ciascuna a ciascuna, e l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$ (29). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $B\Gamma\Delta$ (4).

Dunque il diametro $B\Gamma$ divide per metà il paral-

lelogrammo $AB\Gamma\Delta$, c. d. d.

35. — *I parallelogrammi sulla stessa base e nelle stesse parallele, sono eguali tra loro.*³⁴

³⁴ Euclide sviluppa soltanto il caso piú complicato. Ma il punto E potrebbe cadere su Δ o nella $A\Delta$.

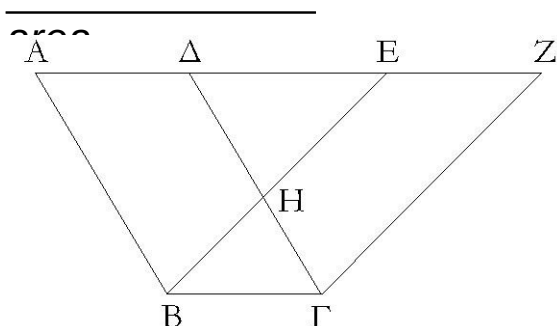
Le dimostrazioni, in questi due casi, già svolte da PROCLO, si ottengono da quella data da Euclide, con alcune lievi semplificazioni.

Si noti che in questa proposizione (35) compare per la prima volta la parola *eguale* usata in un nuovo senso.

Volendo evitare l'ambiguità, gli scrittori moderni hanno proposto, e sembra questa la via preferibile, di introdurre un nuovo concetto astratto, il concetto di *area*, dicendo cioè che i due parallelogrammi *hanno eguale area*, o *sono eguali in*

Siano i parallelogrammi $AB\Gamma\Delta$, $EB\Gamma Z$ su la stessa base e nelle stesse parallele AZ , $B\Gamma$.

Dico che $AB\Gamma\Delta$ è uguale al parallelogrammo $EB\Gamma\Delta$. Poiché infatti $AB\Gamma\Delta$ è un parallelogrammo,



Géométrie (quarte I p. 274) propone parallelogrammi.

Questa denominazione spesso seguita in trattati moderni; ha l'inconveniente di moltiplicare eccessivamente le proposizioni. Bisogna in tal caso ripetere per enti *equivalenti* le nozioni comuni (C1), (C2), (C3). Ed anche cessa in qualche caso la validità della (C2), poiché a triangoli eguali aggiungendo triangoli eguali si possono ottenere parallelogrammi non più *eguali* ma appena *equivalenti*.

Si noti infine che nella dimostrazione della (35)

$A\Delta$ è uguale a $B\Gamma$ (34). E per la stessa ragione anche EZ è eguale a $B\Gamma$. Quindi anche $A\Delta$ è eguale a EZ (C1). Ed ancora la ΔE è comune; dunque tutta la AE è eguale a tutta la ΔZ (C2).

non occorre l'uso della (C3) quando E cade tra A e Δ , ma basta la sola (C2).

È stato dimostrato che si può sempre ricondursi a questo caso, ed essere sufficiente l'uso della (C2) (la quale afferma che aggiungendo aree eguali ad aree eguali si hanno aree eguali), *purché si introduca* un postulato (formulato da ARCHIMEDE, *Quadratura della parabola* II ed. Heiberg vol. 2 p. 265), di cui Euclide non fa uso, il quale dice in sostanza che date due aree diseguali si può trovare un numero n tale, che n volte la minore superi la maggiore.

Si è costruita così una teoria dell'*equivalenza*, od *eguaglianza addittiva* delle aree delle figure

Ma ancora, AB è eguale a $\Delta\Gamma$ (34); dunque le due EA , AB sono eguali alle due $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $Z\Delta\Gamma$ è eguale all'angolo EAB , l'esterno all'interno (29). Dunque la base
piane, per opera di W. BOLYAI, DUHAMEL, DE ZOLT,... Essa è adoperata in varii trattati scolastici italiani moderni.

Si veda per una esposizione completa, l'articolo di U. AMALDI, *Sulla teoria dell'equivalenza*, nelle *Questioni riguardanti la Geometria Elementare*, Bologna, II ed. 1910.

Questa teoria è senza dubbio interessante ed elegante. Essa però sembra assai più artificiosa di quella Euclidea, non essendovi ragione per non introdurre nell'insegnamento fin da principio anche la nozione comune (C 3).

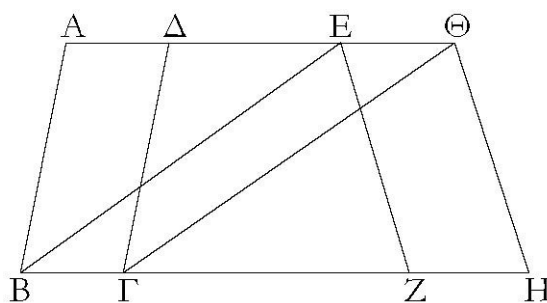
Euclide l'adopera fin da principio; cfr. le prop. (2), (5)...

EB è eguale alla base ΓZ , ed il triangolo EAB sarà anche eguale al triangolo $\Delta Z\Gamma$ (4).

Si tolga ΔHE , comune. Dunque il restante trapezio $ABH\Delta$ è eguale al restante trapezio $EH\Gamma Z$ (C3). Si aggiunga il triangolo HBF , comune. Dunque tutto il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è eguale a tutto il parallelogrammo $EB\Gamma Z$.

Dunque, *i parallelogrammi sulla stessa base, etc. c. d. d.*

36. — *Parallelogrammi su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*



Siano i parallelogrammi $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ su le basi eguali $B\Gamma$, ZH e nelle

stesse parallele $A\Theta$, BH . Dico che il parallelogramma $AB\Gamma\Delta$ è eguale a $EZH\Theta$.

Si conducano infatti BE , $\Gamma\Theta$. Poiché $B\Gamma$ è eguale a ZH e ZH è eguale ad $E\Theta$, anche $B\Gamma$ è eguale a $E\Theta$ (C1). Ma esse sono anche parallele, e le EB , $\Theta\Gamma$ le congiungono. Ma le congiungenti dalla stessa parte di rette eguali e parallele sono anch'esse parallele (33). Perciò $EB\Gamma\Theta$ è un parallelogramma (34), ed esso ancora eguale a $AB\Gamma\Delta$, poiché hanno la stessa base $B\Gamma$ e sono nelle stesse parallele (35), $B\Gamma$, $A\Theta$. Per la stessa ragione $EZH\Theta$ è eguale allo stesso $EB\Gamma\Theta$. Perciò anche il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è eguale a $EZH\Theta$ (C1).

Dunque *parallelogrammi su basi eguali etc. c.*
d. d.

37. — *Triangoli che sono sulla stessa base e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*³⁵

35 Questa proposizione e la precedente mostrano come due figure piane possono aver la

Siano i triangoli $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse parallele $A\Delta$, $B\Gamma$. Dico che il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $\Delta B\Gamma$.

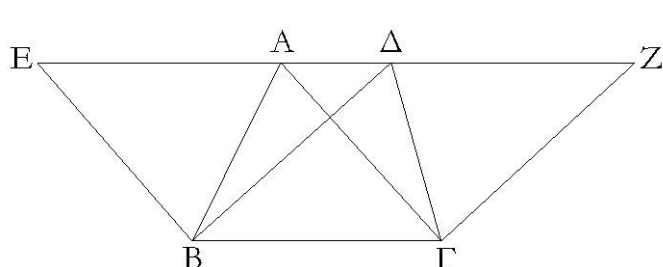
Si prolunghi $A\Delta$ da ognuna delle due parti, ver-

stessa area, senza aver lo stesso perimetro.

Il credere che il perimetro possa dare un'idea dell'area di una superficie, sembra esser stato un errore comune tra gli antichi scrittori ignari di matematica. TUCIDIDE, VI, 1, stima l'area della Sicilia dal tempo occorrente a navigarle intorno. PLINIO, VI, 208, per confrontare le diverse parti del mondo dice: «aptissime.... spectabitur ad longitudinem latitudine addita». QUINTILIANO, *Institutiones oratoriae*, I, cap. X, 39-52, dice: «*De Geometria*.... Falsa quoque veris similia geometria ratione deprehendit... Nan quis non ita proponenti credat: Quorum locorum extremae lineae eandem mensuram colligunt, eorumque spatio quo-

so E, Z ; da B si conduca la BE parallela alla ΓA , e da Γ si conduca la ΓZ parallela alla $B\Delta$ (31).

Dunque $EB\Gamma A, \Delta B\Gamma Z$ sono entrambi paralle-



logrammi, e
sono eguali,

t necesse

est? At id falsum est. Nam plurimum refert cuius
formae sit ille circuitus; reprehensique a geome-
tris sunt historici, quia magnitudinem insularum
satis significari navigationis ambitu crediderunt».

QUINTILIANO enuncia poi correttamente vari teore-
mi geometrici, ricordando che il circolo è la figura
piana di area massima, tra quelle aventi lo stesso
perimetro, e ricorre, per convincere i non geome-
tri, ad un esempio numerico osservando che un
quadrato avente per lato 10 passi ed i rettangoli
aventi per lati 15×5 , ovvero 19×1 passi, hanno lo
stesso perimetro, ma l'area assai diversa.

poiché sono sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse parallele $B\Gamma$, EZ (35). Ed ancora il triangolo $AB\Gamma$ è la metà del parallelogramma $EB\Gamma A$, poiché il diametro AB divide questo per metà (34). Poi anche il triangolo $\Delta B\Gamma$ è la metà del parallelogramma $\Delta BZ\Gamma$ poiché anche il diametro $\Delta\Gamma$ lo divide in due parti eguali. Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $\Delta B\Gamma$.

Dunque *triangoli che sono sulla stessa base*
etc. c. d. d.

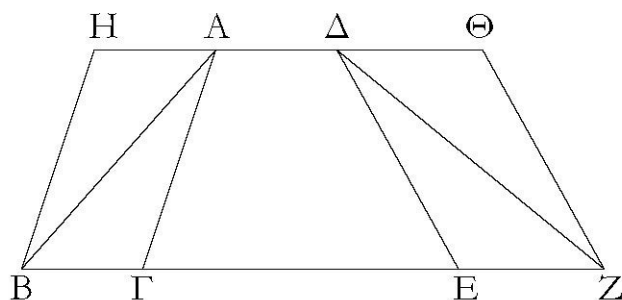
38. — *Triangoli che sono su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*

Siano i triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ sulle basi eguali $B\Gamma$, EZ e nelle stesse parallele BZ , $A\Delta$. Dico che il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ .

Si prolunghi infatti $A\Delta$ da ognuna delle due parti verso H , Θ e per B si conduca alla ΓA la paral-

lela BH , e per Z alla ΔE la parallela $Z\Theta$ (31).

Ognuno dei due $HB\Gamma A$, $\Delta EZ\Theta$ è dunque un pa-



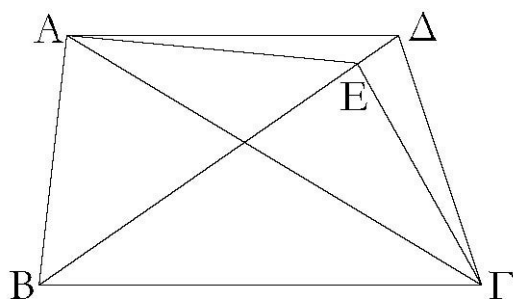
rallelogrammo. Ed è $HB\Gamma A$ eguale a $\Delta EZ\Theta$. Poiché sono su

basi eguali $B\Gamma$, EZ e nelle stesse parallele BZ , $H\Theta$ (36). Ma il triangolo $AB\Gamma$ è metà del parallelogrammo $HB\Gamma A$; infatti il diametro AB lo divide per metà (34). Ed il triangolo $ZE\Delta$ è metà del parallelogrammo $\Delta EZ\Theta$; infatti il diametro ΔZ lo divide per metà (34). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ .

Dunque, *i triangoli che sono su basi eguali*, etc., c. d. d.

39. — *Triangoli eguali che sono sulla stessa*

base e dalla stessa parte, sono anche nelle stesse parallele.



Siano i triangoli
eguali $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ sulla
stessa base $B\Gamma$, e
dalla stessa parte di
 $B\Gamma$. Dico che sono anche nelle stesse parallele.

Si conduca infatti la $A\Delta$. Dico che $A\Delta$ è parallela alla $B\Gamma$.

Se infatti non è, si conduca per il punto A alla retta $B\Gamma$ la parallela AE (31), e si congiunga la $E\Gamma$. Allora il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $EB\Gamma$, poiché è sulla stessa base $B\Gamma$ di esso, e nelle stesse parallele (37). Ma $AB\Gamma$ è eguale $\Delta B\Gamma$; dunque anche $\Delta B\Gamma$ è eguale a $EB\Gamma$ (C1), il maggiore al minore, il che è impossibile. Dunque AE non è parallela a $B\Gamma$. Similmente dimostrere-

mo che nessun'altra eccetto $A\Delta$ è parallela. Dunque $A\Delta$ è parallela a $B\Gamma$.

Dunque, *triangoli eguali*, etc. c. d. d.

40. — [*Triangoli eguali su basi eguali e dalla stessa parte sono anche nelle stesse parallele*].³⁶

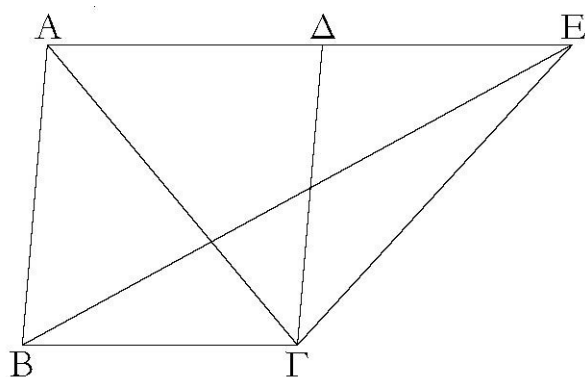
41. — *Se un parallelogrammo ha la stessa ba-*

³⁶ Questa proposizione non si trovava nel testo originario, ed è stata aggiunta da qualche commentatore. Così ha provato HEIBERG (*Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 50) adoperando un papiro scoperto al Fayum (*Fayūm Towns and their papyri*, p. 96 n. IX).

È da notarsi che il Tartaglia nella sua bella edizione di Euclide sente il bisogno di modificare la dimostrazione. La dimostrazione si conduce come quella della (39). La (40) non ha nessun uso nel seguito degli Elementi.

se di un triangolo, ed è nelle stesse parallele, il parallelogrammo è doppio del triangolo.

Abbiamo infatti il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ la stessa base $B\Gamma$ del triangolo $EB\Gamma$ e sia nelle stesse parallele $B\Gamma, AE$. Dico che il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo $EB\Gamma$.

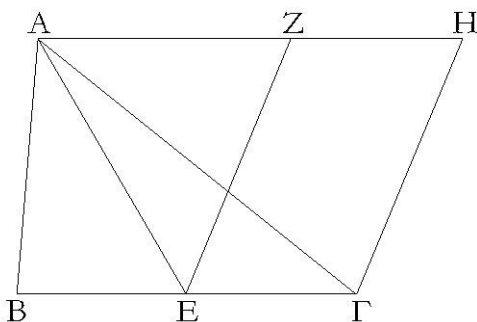


Si conduca infatti la $\Delta\Gamma$. Il triangolo $AB\Gamma$ è allora eguale al triangolo $EB\Gamma$; poi-

ché essi sono sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse parallele $B\Gamma, AE$ (37). Ma il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo $AB\Gamma$, poiché il diametro $A\Gamma$ lo divide per metà (34). Dunque anche il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo $EB\Gamma$.

Dunque, se un parallelogrammo, etc. c. d. d.

42. — Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo eguale ad un dato triangolo.



Sia $AB\Gamma$ il triangolo dato, e Δ l'angolo rettilineo dato. Si deve allora co-

struire nell'angolo Δ un parallelogrammo eguale al triangolo $AB\Gamma$.

Si divida la $B\Gamma$ per metà in E (10), e si conduca la AE , e sulla retta $E\Gamma$ nel punto E di essa si costruisca l'angolo $ZE\Gamma$ eguale all'angolo Δ (23), e per A si conduca la AH parallela ad $E\Gamma$ (31), e per Γ la ΓH parallela ad EZ . Dunque $ZEGH$ è un parallelogrammo. E poiché BE è eguale ad $E\Gamma$, il triangolo ABE è eguale al triangolo AEG , poiché

sono su basi eguali BE , $E\Gamma$ e tra le stesse parallele $B\Gamma$ AH (38). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è doppio del triangolo $AE\Gamma$. Ma anche il parallelogrammo $ZE\Gamma H$ è doppio del triangolo $AE\Gamma$, perché ha la stessa base ed è nelle stesse parallele (41).

Dunque il parallelogrammo $ZE\Gamma H$ è eguale al triangolo $AB\Gamma$ ed ha l'angolo ΓEZ eguale all'angolo dato Δ .

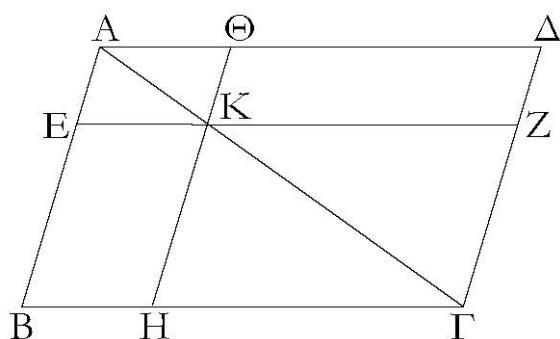
Dunque si è costruito nell'angolo ΓEZ , che è eguale all'angolo Δ , il parallelogrammo $ZE\Gamma H$, eguale al triangolo dato $AB\Gamma$ c. d. f.

43. — *In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi intorno al diametro sono eguali tra loro.*

Sia il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ e il diametro di esso $A\Gamma$, e intorno alla diagonale $A\Gamma$ siano i parallelogrammi $E\Theta$, HZ . E siano BK , $K\Delta$ quelli che si

chiamano *complementi*. Dico che il complemento BK è eguale al complemento $K\Delta$.

Poiché infatti $AB\Gamma\Delta$ è un parallelogrammo, ed $A\Gamma$ un diametro di esso, il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $A\Gamma\Delta$ (34). Ed ancora, poiché $E\Theta$ è un parallelogrammo, e un diametro di esso è AK , il triangolo AEK è eguale al triangolo $A\Theta K$. E per la stessa ragione anche il triangolo $KZ\Gamma$ è eguale al triangolo $K\Theta\Gamma$ (34). Poiché dunque il triangolo AEK è eguale al triangolo $A\Theta K$, e $KZ\Gamma$ a $K\Theta\Gamma$, il triangolo AEK col triangolo $K\Theta\Gamma$, è eguale al triangolo $A\Theta K$ col triangolo $KZ\Gamma$ (C2).



Ma tutto il triangolo $AB\Gamma$ è eguale a tutto $A\Delta\Gamma$. Dunque il resto, il complemento BK ,

è eguale al resto, il complemento $K\Delta$ (C3).

Dunque, *in ogni parallelogrammo*, etc. c. d. d.

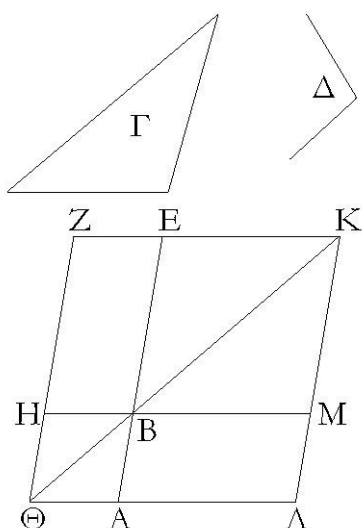
44. — *Ad una retta data, in un angolo rettilineo dato, applicare un parallelogrammo eguale ad un triangolo dato.*

Sia AB la retta data, Γ il triangolo dato e Δ l'angolo rettilineo dato. Si deve allora alla retta data AB , in un angolo eguale a Δ , applicare un parallelogrammo eguale al triangolo Γ .

Si costruisca il parallelogrammo $BEZH$ eguale al triangolo Γ , nell'angolo EBH , il quale sia eguale all'angolo Δ (42); e si ponga in modo che la BE sia per diritto alla AB ; e si prolunghi la ZH in Θ , e per A si conduca la $A\Theta$ parallela ad ognuna delle due BH , EZ (31), e si conduca la ΘB . Poiché la ΘZ cade sulle due parallele $A\Theta$, EZ , gli angoli $A\Theta Z$, ΘZE sono eguali a due retti (29); perciò gli angoli $B\Theta H$, HZE son minori di due retti. Ma due

rette [le quali incontrate da una terza] fanno gli angoli [interni e dalla stessa parte] minori di due retti, prolungate all'infinito si incontrano (P5).

Dunque le ΘB , ZE prolungate sì incontreranno.



Si prolunghino, e si incontrino in K , e per K si conduca la KA parallela ad entrambe le EA , $Z\Theta$ e si prolunghino le ΘA , HB fino ai punti, Λ , M .

Dunque $\Theta\Lambda KZ$ è un parallelogrammo, ΘK un suo diametro, e intorno a ΘK i parallelogrammi AH , ME , e quelli che si chiamano *complementi*, AB , BZ . Dunque ΛB è eguale a BZ (48).

Ma BZ è eguale al triangolo Γ dunque anche ΛB è eguale a Γ (C1). E poiché l'angolo HBE è eguale a ABM (15), e HBE è eguale a Δ , dunque

anche ABM è eguale all'angolo Δ .

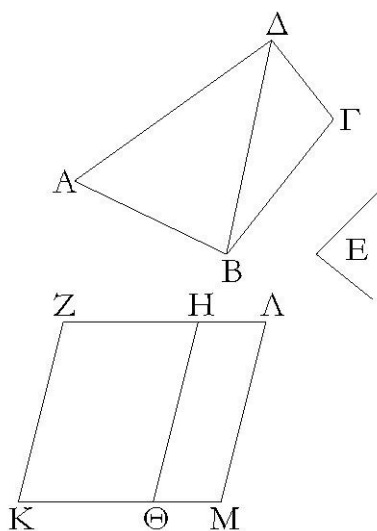
Dunque alla retta data AB , nell'angolo ABM che è eguale a Δ , è stato applicato il parallelogrammo AB , eguale al triangolo Γ c. d. f.

45. — *Costruire un parallelogrammo eguale ad una data figura rettilinea, in un angolo rettilineo dato.*³⁷

37 Le proposizioni (42), (44), (45) risolvono tre problemi (ciascuno dei quali è piú generale del precedente), relativi alla *trasformazione delle figure piane*. La (45) insegna a trasformare una qualunque figura rettilinea (poligono), in un parallelogrammo, avente un angolo dato ed una base data. Si possono quindi cosí trovare la somma o la differenza di due figure piane.

Soltanto nella (14) del libro II, Euclide insegnerà a trasformare un rettangolo, ovvero una qualunque figura piana in un quadrato.

Sia $AB\Gamma\Delta$ la figura rettilinea data, e sia E l'angolo rettilineo dato. Si deve allora costruire un parallelogrammo, nel dato angolo E eguale alla figura rettilinea $AB\Gamma\Delta$.

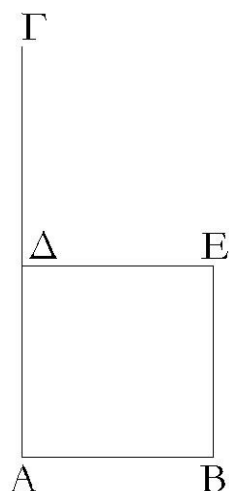


Si conduca la ΔB , e si costruisca un parallelogrammo $Z\Theta$ nell'angolo ΘKZ che sia eguale all'angolo E (42).

E alla retta $H\Theta$ si applichi il parallelogrammo HM nell'angolo $H\Theta M$ che sia eguale all'angolo E (44).³⁸

³⁸ Così il testo nella traduzione del Vacca. Per una più completa traduzione del testo greco si dovrebbe leggere "Si conduca la ΔB , e si costruisca un parallelogrammo $Z\Theta$ eguale al triangolo $AB\Delta$ nell'angolo ΘKZ che sia eguale all'angolo E

E poiché l'angolo E è eguale ad ognuno dei due ΘKZ , $H\Theta M$, anche ΘKZ è eguale a $H\Theta M$. Si aggiunge $K\Theta H$, comune. Dunque $ZK\Theta$, $K\Theta H$ sono eguali a $K\Theta H$, $H\Theta M$ (C2). Ma $ZK\Theta$, $K\Theta H$ sono eguali a due retti (29), dunque anche $K\Theta H$, $H\Theta M$ sono eguali a due retti (C1). Dun-



que ad una retta $H\Theta$ ed al punto Θ di essa, le due rette $K\Theta$, ΘM , non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti; dunque $K\Theta$ è per diritto alla ΘM (14). E poiché la retta ΘH

cade sulle due parallele KM , ZH , gli angoli alterni $M\Theta H$, ΘHZ sono eguali tra loro (29). Si aggiunga

(42). E alla retta $H\Theta$ si applichi il parallelogrammo HM eguale al triangolo $\Delta B\Gamma$ nell'angolo $H\Theta M$ che sia eguale all'angolo E [Nota per l'edizione digitale *Manuzio*].

$\Theta H \Lambda$ comune, Allora $M\Theta H$, $\Theta H \Lambda$ sono eguali a $\Theta H Z$, $\Theta H \Lambda$. Ma $M\Theta H$, $\Theta H \Lambda$ sono eguali a due retti (29). Dunque anche $\Theta H Z$, $\Theta H \Lambda$ sono eguali a due retti. Dunque la ZH è per diritto alla $H \Lambda$ (14). E poiché ZK è eguale e parallela a ΘH (34), ed anche ΘH ad $M \Lambda$, anche la KZ è eguale e parallela alla $M \Lambda$. E le congiungono le rette KM , $Z \Lambda$. Dunque anche le KM , $Z \Lambda$ sono eguali e parallele (30). Dunque $KZ \Lambda M$ è un parallelogrammo. E poiché il triangolo $AB \Delta$ è eguale al parallelogrammo $Z \Theta$, e $\Delta B \Gamma$ è eguale a HM , dunque tutta la figura rettilinea $AB \Gamma \Delta$ è eguale al parallelogrammo $KZ \Lambda M$.

Dunque nell'angolo ZKM , che è eguale all'angolo dato E , si è costruito il parallelogrammo $KZ \Lambda M$ eguale alla data figura rettilinea $AB \Gamma \Delta$; c. d. f.

46. — *Su una retta data descrivere un quadrato.*³⁹

Sia AB la retta data; si deve allora sulla retta AB descrivere un quadrato.

Si conduca alla retta AB , dal punto A su di essa la AF ad angolo retto (11), e si ponga $A\Delta$ eguale alla AB . E per il punto Δ si conduca la AE parallela alla AB , e dal punto B la BE parallela alla $A\Delta$ (31).

Dunque $A\Delta EB$ è un parallelogramma, quindi la AB è eguale alla ΔE , e la $A\Delta$ alla BE (34); ma AB è eguale alla $A\Delta$; dunque le quattro BA , $A\Delta$, AE , EB sono eguali tra loro (C1); dunque il paralle-

39 Nella (1) Euclide aveva insegnato a costruire un triangolo equilatero.

Nelle (11), (15), (16), del libro quarto insegnerà a costruire un pentagono regolare, un esagono regolare, ed un pentadecagono regolare.

logramma $A\Delta EB$ è equilatero.

Dico che è anche rettangolo. Poiché infatti la retta $A\Delta$ cade sulle parallele AB , ΔE , i due angoli $BA\Delta$, $A\Delta E$ sono eguali a due retti (29). Ma $BA\Delta$ è retto, dunque lo è anche $A\Delta E$. Ma in uno spazio parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono eguali tra loro (34). Dunque son retti ognuno degli angoli opposti ABE , $BE\Delta$.

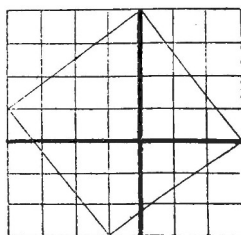
Dunque $A\Delta EB$ è rettangolo. E già si è dimostrato che è equilatero. Dunque è un quadrato (T22), ed è descritto sulla retta AB .

47. — *Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato che sottende l'angolo retto, è eguale ai quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.*⁴⁰

40 PROCLO osserva che la tradizione attribuisce questo teorema a PITAGORA, il quale avrebbe sacrificato un bue agli Dei per questa scoperta.

PLUTARCO (*Non posse suaviter vivi secundum*

Sia il triangolo rettangolo $AB\Gamma$ avente l'angolo retto $BA\Gamma$. Dico che il quadrato di $B\Gamma$ è eguale ai quadrati di BA ,



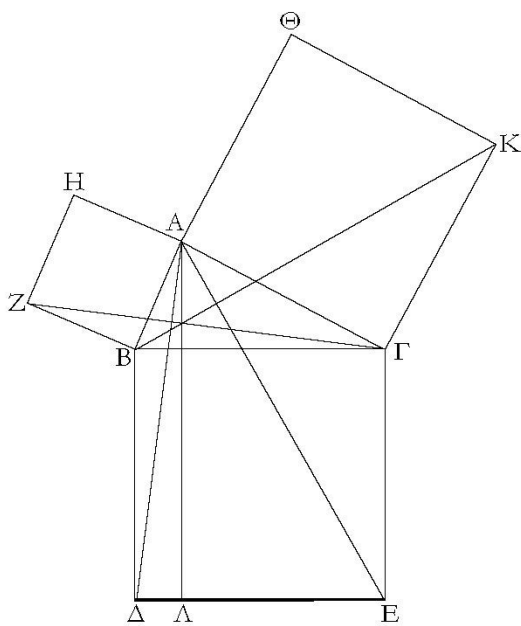
Epicurum c. 11), DIOGENE LAERZIO (VIII, 12) ed ATENEIO (X, 13) son concordi nell'attribuire a Pitagora questa proposizione.

Essa è però forse, assai più antica almeno in un caso semplice, quello in cui i cateti del triangolo rettangolo sono 3, 4 e quindi l'ipotenusa 5.

In un frammento di papiro della XII dinastia egiziana, scoperto a Kahun, M. CANTOR (*Archiv. d. Math. u. Phys.*, VIII. 1905, p. 66) ha trovato l'eguaglianza $3^2+2^2=5^2$ scritta in varî modi.

Forse anche gli antichi Babilonesi conoscevano questo risultato, sebbene esso non sia ancora stato ritrovato esplicitamente nei documenti pervenuti fino a noi. (Cfr. M. CANTOR, *Gesch. d.*

Si costruisca infatti su $B\Gamma$ il quadrato $B\Delta E\Gamma$, e su $BA, A\Gamma$, i quadrati $HB, \Theta\Gamma$ (46), e per A si conduca la AA' parallela



omo ed astrologo ci-
ia *Cíou*), zio del re
ella eguaglianza
nezzo di questa
cioè che il quadrato

nell'ipotenusa si ottiene togliendo dal quadrato circoscritto 49, i quattro triangoli rettangoli esterni, ovvero due rettangoli 3×4 , ossia $49 - 24 = 25$), e si serví di questo risultato per costruire un angolo retto.

E cosí si fa oggi ancor talvolta in agrimensura, o in topografia quando non si possieda uno strumento piú preciso. Si costruisce con un filo teso e

ad ognuna delle due $B\Delta$, ΓE (31); e si congiungano le $A\Delta$, $Z\Gamma$.

E poiché ognuno dei due angoli $BA\Gamma$, BAH è retto, dunque con una retta BA , e nel punto A di essa, le due rette $A\Gamma$, AH , non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti (14). Dunque ΓA è per diritto alla AH . E per la stessa ragione BA è per diritto alla $A\Theta$.

E poiché l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo ZBA ,

ripiegato, un triangolo di lati, 3, 4, 5, e si ha così un angolo retto (48).

Di questo teorema che si chiama ordinariamente di *Pitagora* son state date interessanti ed assai varie dimostrazioni.

Son notevoli tra le altre, una di PAPPO (IV, p. 177), una dell'arabo THABIT IBN QURRA (826-901 d. Cr.), una trovata nei mss. di LEONARDO DA VINCI (1452-1519). Cfr. HEATH, vol. 1 p. 364-368.

perché ognuno di essi è retto, si aggiunga $AB\Gamma$, comune. Allora tutto ΔBA è eguale a tutto $ZB\Gamma$ (C2).

E poiché ΔB è eguale a $B\Gamma$ e ZB a BA (T22) dunque le due ΔB , BA sono eguali alle due ZB , $B\Gamma$, ciascuna a ciascuna e l'angolo ΔBA è eguale all'angolo $ZB\Gamma$. Allora la base $A\Delta$ è eguale alla base $Z\Gamma$, ed il triangolo $AB\Delta$ è eguale al triangolo $ZB\Gamma$ (4).

E il parallelogrammo $B\Lambda$ è doppio del triangolo $AB\Delta$, poiché hanno la stessa base $B\Delta$ e sono nelle stesse parallele $B\Delta$, $A\Lambda$ (41). Ed ancora, il quadrato HB è doppio del triangolo $ZB\Gamma$, poiché hanno la stessa base ZB e sono nelle stesse parallele ZB , $H\Gamma$ (41). Dunque il parallelogrammo $B\Lambda$ è eguale al quadrato HB .

Similmente, congiunte le AE , BK , si dimostrerà che anche il parallelogrammo $\Gamma\Lambda$ è eguale al qua-

drato $\Theta\Gamma$.

Dunque tutto il quadrato $B\Delta E\Gamma$ è eguale ai due quadrati HB , $\Theta\Gamma$ (C2). Ed il quadrato $B\Delta E\Gamma$ è costruito su $B\Gamma$ ed i quadrati HB , $\Theta\Gamma$ su le BA , $A\Gamma$. Dunque il quadrato del lato $B\Gamma$ è eguale ai quadrati dei lati BA , $A\Gamma$.

Dunque, *nei triangoli rettangoli*, etc. c. d. d.

48. — *Se in un triangolo il quadrato di un lato è eguale ai quadrati dei due restanti lati del triangolo, l'angolo compreso dai due restanti lati del triangolo è retto.*⁴¹

41 In questa dimostrazione EUCLIDE ammette che: *se due quadrati sono eguali, sono eguali anche le loro basi*. Già PROCLO aveva sentito il bisogno di dimostrare questa proposizione, e la sua inversa, e più recentemente DE MORGAN (*Companion to the Almanac for 1849*, p. 8) aveva pure proposto di introdurle dopo la (46).

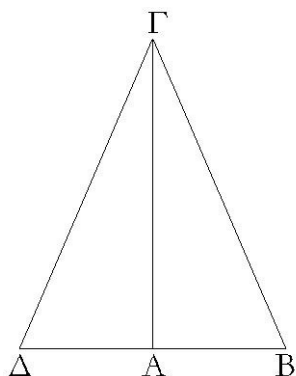
Infatti nel triangolo $AB\Gamma$ sia il quadrato del lato $B\Gamma$ eguale ai quadrati dei lati BA , $A\Gamma$. Dico che l'angolo $BA\Gamma$ è retto.

Si conduca infatti dal punto A la retta $A\Delta$ ad an-

Ma la verità della inversa, cioè: *sono eguali i quadrati costruiti su basi eguali* si deduce colla semplice applicazione di un principio logico il quale dice che: *se su due enti eguali si eseguisce la stessa operazione, i risultati sono eguali* (cfr. PEANO, *Aritmetica* etc. p. 49).

La proposizione diretta si dimostra subito osservando che se due rette sono diseguali, i quadrati costruiti su di esse sono diseguali, e quindi con una semplice regola di logica (enunciata nella nota alla (18), p. 43) si deduce la proposizione. Queste osservazioni possono spiegare perché Euclide non abbia creduto opportuno enunciare esplicitamente le due proposizioni.

golo retto alla $\Delta\Gamma$ (11) e si ponga la ΔA eguale alla BA , e si congiunga la $\Delta\Gamma$.



Poiché la ΔA è eguale alla AB , il quadrato della ΔA è eguale al quadrato della AB . Si aggiunga il quadrato della $A\Gamma$ comune. I quadrati di ΔA , $A\Gamma$ sono dunque eguali ai quadrati di BA , $A\Gamma$ (C2).

Ma il quadrato di $\Delta\Gamma$ è eguale ai quadrati di ΔA , $A\Gamma$, infatti l'angolo $\Delta A\Gamma$ è retto (47); ed il quadrato di $B\Gamma$ è eguale ai quadrati di BA , $A\Gamma$, ciò infatti si è supposto. Dunque anche il quadrato di $\Delta\Gamma$ è eguale al quadrato di $B\Gamma$ (C 1), perciò anche la $\Delta\Gamma$ è eguale alla $B\Gamma$. Ma poiché anche la ΔA è eguale alla AB , e la $A\Gamma$ è comune, le due ΔA , $A\Gamma$ sono eguali alle due BA , $A\Gamma$ e la base $\Delta\Gamma$ è eguale alla base $B\Gamma$; dunque l'angolo $\Delta A\Gamma$ è eguale all'angolo $BA\Gamma$ (8). Ma $\Delta A\Gamma$ è retto, dunque an-

che $BA\Gamma$ è retto.

Se dunque, *in un triangolo*, etc. c. d. d.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

A

α΄

Ὅροι

α΄. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β΄. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ΄. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἐαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε΄. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστιν, ἧ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ς΄. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἐαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η΄. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἢ ἐν ἐπιπέδῳ δύο

γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας
κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὄταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν γραμμαὶ
εὐθεῖαι ὧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς
ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐκατέρω
τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶ, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα
κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὀρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

ιδ'. Σχήμα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὄρων
περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς
γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς
σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι
αἱ προσπίπτουσιν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ισ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἣτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ'. Σχήματα εὐθύγραμμα ἐστὶ τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστὶ τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα΄ Ὅτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων
ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθήν
γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν
γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον
γωνίας.

κβ΄. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων
τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ
ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν,
οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον
μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς
ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις
ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστίν οὔτε ὀρθογώνιον.
τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια
καλείσθω.

κγ΄. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ
αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς
ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα
συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αιτήματα.

α΄. Ἡιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοινὰ ἔννοιαι.

α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν

ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.

δ'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ε'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν.

α'.

**Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης
τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.**

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ

κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεΐαι αὐτῶν ΓΑ, ΒΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρω ἄρα τῶν ΓΑ, ΒΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΒΒ ἐστὶν ἴση· αὐτὰς ἄρα αὐτῶν ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεΐαν θέσθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση. ἐκατέρω ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ

ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση.

ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφήρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκατέρα καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρα ἐκατέρα, ὅφ' ἅς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἐκατέραν ἐκατέρα τὴν μὲν ΑΒ τῇ

ΔE τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ ΔZ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$
γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἴσην. λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ $ΒΓ$
βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ
 $\Delta ΕΖ$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς
λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ'
ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ $ΑΒΓ$
τῇ ὑπὸ $\Delta ΕΖ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $\Delta ΖΕ$.

Ἐφαρμοζομένου γάρ τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου ἐπὶ τὸ
 $\Delta ΕΖ$ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου
ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ $ΑΒ$ εὐθείας ἐπὶ τὴν $\Delta Ε$,
ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ E διὰ τὸ ἴσην
εἶναι τὴν $ΑΒ$ τῇ $\Delta Ε$ · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς $ΑΒ$ ἐπὶ
τὴν $\Delta Ε$ ἐφαρμόσει καὶ ἡ $ΑΓ$ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν $\Delta Ζ$ διὰ
τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ·
ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z σημεῖον
ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν $ΑΓ$ τῇ $\Delta Ζ$.
ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόσει· ὥστε
βάσις ἡ $ΒΓ$ ἐπὶ βάσιν τὴν $ΕΖ$ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ

τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἢ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἢ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἢ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἢ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρῃ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρῃ ἐκατέρῃ, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

**Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει
γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ
προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ
τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.**

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ABΓ$ ἴσην ἔχον
τὴν AB πλευρὰν τῇ $ΑΓ$ πλευρᾷ, καὶ
προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς AB , $ΑΓ$
εὐθεῖαι αἱ $ΒΔ$, $ΓΕ$. λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ γωνία
τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΒΔ$ τῇ ὑπὸ $ΒΓΕ$.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς $ΒΔ$ τυχὸν σημεῖον τὸ Z ,
καὶ ἀφηγήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς $ΑΕ$ τῇ
ἐλάσσονι τῇ AZ ἴση ἡ AH , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
 $ZΓ$, HB εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν AZ τῇ AH ἡ δὲ AB τῇ
 $ΑΓ$, δύο δὴ αἱ ZA , $ΑΓ$ ὀυσι ταῖς HA , AB ἴσαι εἰσίν
ἐκατέρω ἐκατέρω· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι

τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση
 ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον
 ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις
 ἴσαι ἔσονται ἐκατέρω ἐκατέρω, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι
 πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ
 ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ
 ΑΖ ὅλη τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση,
 λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ
 καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς
 ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἐκατέρω ἐκατέρω· καὶ γωνία ἡ
 ὑπὸ ΒΖΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν
 κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ
 τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς
 λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρω ἐκατέρω, ὑφ'
 ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ
 μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ
 ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ
 ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ

ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· αἱ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ προσεκβληθεῖσιν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἢ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστὶν ἢ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἢ ἑτέρα αὐτῶν

μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ AB , καὶ ἀφηγήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάττονι τῇ AG ἴση ἡ ΔB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\Delta\Gamma$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔB τῇ AG κοινὴ δὲ ἡ $B\Gamma$, δύο δὲ αἱ ΔB , $B\Gamma$ δύο ταῖς AG , GB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ AGB ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ $\Delta\Gamma$ βάσει τῇ AB ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ AGB τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ AB τῇ AG · ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλω καὶ

**ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ
πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.**

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB
δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο
εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω
συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ τῷ
τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα
ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ
πέρας ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ
αὐτὸ πέρας ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ
ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ
ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων
ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ
ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ
ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶ μείζων· ὅπερ

ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἐκάτερα ἐκάτερα συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκάτεραν ἐκάτερα, ἔχη δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἐκάτεραν ἐκάτερα, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ

βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ
γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ
ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου
ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ
ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ διὰ τὸ ἴσην
εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ. ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ
τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ,
ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ
ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ
οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ
ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας
δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι
ἐκατέρα ἐκατέρα πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ
τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ
συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ
βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ
ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν

ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν
ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο
πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκατέρῃ καὶ τὴν
βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ
ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν
περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

**Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα
τεμεῖν.**

Ἐστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ
ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ
ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἢ ΑΕ, καὶ
ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ
τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ

AZ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς AZ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ AZ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, AZ δυσὶ ταῖς ΕΑ, AZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς AZ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ι΄

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὲ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ

ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὲ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΙΑ΄.

**Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ
δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας
εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.**

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν
σημεῖον ἐπ’ αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου
τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν

γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἢ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ. λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

**Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ
δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς,
κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.**

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB, τὸ
δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ. δεῖ
δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ
τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς,
κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας
τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ
διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ EZH, καὶ
τετμήσθω ἡ EH εὐθεῖα δίχῃ κατὰ τὸ Θ, καὶ
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι
ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ
δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς,
κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $\widehat{H\Theta}$ τῇ $\widehat{\Theta E}$, κοινὴ δὲ ἡ $\widehat{\Theta \Gamma}$,
 δύο δὲ αἱ $\widehat{H\Theta}$, $\widehat{\Theta \Gamma}$ δύο ταῖς $\widehat{E\Theta}$, $\widehat{\Theta \Gamma}$ ἴσαι εἰσὶν
 ἑκατέρωτα ἑκατέρωτα· καὶ βάσις ἡ ΓH βάσει τῇ ΓE
 ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Gamma \Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ
 $E \Theta \Gamma$ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα
 ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας
 ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρωτα τῶν ἴσων γωνιῶν
 ἐστὶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται
 ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἀπειρον τὴν AB
 ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ'
 αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ $\Gamma \Theta$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

**Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας
 ποιῇ, ἦτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας
 ποιήσῃ.**

Εὐθεΐα γάρ τις ἡ AB ἐπ' εὐθεΐαν τὴν $ΓΔ$
σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$.
λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$ γωνίαι ἦτοι δύο ὀρθαί
εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΓΒΑ$ τῇ ὑπὸ $ΑΒΔ$,
δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὐ, ἥχθω ἀπὸ τοῦ B
σημείου τῇ $ΓΔ$ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΒΕ$. αἱ ἄρα ὑπὸ
 $ΓΒΕ$, $ΕΒΔ$ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $ΓΒΕ$
δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΑΒΕ$ ἴση ἐστίν, κοινὴ
προσκέισθω ἡ ὑπὸ $ΕΒΔ$. αἱ ἄρα ὑπὸ $ΓΒΕ$, $ΕΒΔ$
τρισὶ ταῖς ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΑΒΕ$, $ΕΒΔ$ ἴσαι εἰσίν. πάλιν,
ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $ΔΒΑ$ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ΔΒΕ$, $ΕΒΑ$ ἴση
ἐστίν, κοινὴ προσκέισθω ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$. αἱ ἄρα ὑπὸ
 $ΔΒΑ$, $ΑΒΓ$ τρισὶ ταῖς ὑπὸ $ΔΒΕ$, $ΕΒΑ$, $ΑΒΓ$ ἴσαι
εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $ΓΒΕ$, $ΕΒΔ$ τρισὶ
ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις
ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ $ΓΒΕ$, $ΕΒΔ$ ἄρα ταῖς ὑπὸ
 $ΔΒΑ$, $ΑΒΓ$ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $ΓΒΕ$, $ΕΒΔ$ δύο

ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ $\Delta B A$, $A B \Gamma$ ἄρα δυσὶν
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας
ποιῇ, ἥτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας
ποιήσῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐὰν πρὸς τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας
ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ
εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ $A B$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
σημείῳ τῷ B δύο εὐθεῖαι αἱ $B \Gamma$, $B \Delta$ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ $A B \Gamma$,
 $A B \Delta$ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν. λέγω ὅτι ἐπ'
εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓB ἢ $B \Delta$.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶν. κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρὸς τινὶ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

**Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς
κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις
ποιοῦσιν.**

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας
κατὰ τὸ E σημεῖον. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ
 $AE\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEB , ἡ δὲ ὑπὸ ΓEB τῇ ὑπὸ
 $AE\Delta$.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AE ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $\Gamma\Delta$
ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$, αἱ
ἄρα ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.
πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔE ἐπ' εὐθεῖαν τὴν AB
ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ $AE\Delta$, ΔEB , αἱ
ἄρα ὑπὸ $AE\Delta$, ΔEB γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι
εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$ δυσὶν
ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$ ταῖς ὑπὸ $AE\Delta$,
 ΔEB ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ ὑπὸ $AE\Delta$.

λοιπή ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση
ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ,
ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς
κατὰ κο- ρυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΙΣ΄.

**Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν
προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας
τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων
ἐστίν.**

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω
αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστίν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς
καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα

ἢ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ
κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἢ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΖΓ, καὶ
διήχθω ἢ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἢ δὲ ΒΕ τῇ
ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν
ἐκατέρω ἐκατέρω· καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ
ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα
ἢ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον
τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι
ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἐκατέρω ἐκατέρω,
ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα
ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δὲ ἐστὶν ἢ
ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς
ὑπὸ ΒΑΕ. Ὅμοίως δὲ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα
δειχθήσεται καὶ ἢ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἢ ὑπὸ ΑΓΔ,
μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν
προσεκβληθείσης ἢ ἐκτὸς γωνία ἐκατέρας τῶν

ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

**Παντὸν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν
ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.**

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ
τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι
πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ
ὕπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς
ὕπὸ ΑΒΓ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὕπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα
ὕπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν.
ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ
ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο

ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸνς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο
ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

**Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν
μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.**

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν
ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ
ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ
ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον
τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ
καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ

ἢ ὑπὸ $AB\Delta$ τῆς ὑπὸ $ΑΓΒ$ · πολλῶ ἄρα ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΑΓΒ$.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἢ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΙΘ΄.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίαν τῆς ὑπὸ $B\Gamma A$. λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἢ $ΑΓ$ πλευρᾶς τῆς AB μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἢ $ΑΓ$ τῇ AB ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἢ $ΑΓ$ τῇ AB · ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ · οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἢ $ΑΓ$ τῇ AB . οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ $ΑΓ$ τῆς AB · ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῆς ὑπὸ $ΑΓΒ$ · οὐκ ἔστι δέ·

οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ,
ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν
ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

**Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς
μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.**

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ
τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι
πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ,
αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω
τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ
ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ

μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ,
ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ
ὑποτείνει, ἢ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. ἴση δὲ ἢ
ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως
δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές
εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς
λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

**Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ
τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν,
αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο
πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ
γωνίαν περιέξουσιν.**

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν

τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περὰ τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι
ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. λέγω ὅτι αἱ ΒΔ,
ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν
ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν
περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς
τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές
εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ
ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω
ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν.
πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ
ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ
ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν.
ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ·
πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς
ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα
τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ

τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταύτᾳ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ
τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ
τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ
ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς
ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν ἀπὸ
τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ
συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο
πλευρῶν ἐλάττονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν
περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ´.

**Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς
δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς
δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ
μεταλαμβανομένας.**

Ἐστῶσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ,

ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν A, B τῆς Γ , αἱ δὲ A, Γ τῆς B , καὶ ἔτι αἱ B, Γ τῆς A . δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς A, B, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔE πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ , ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ E , καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ ΔZ , τῇ δὲ B ἴση ἡ ZH , τῇ δὲ Γ ἴση ἡ $H\Theta$. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ τῷ $Z\Delta$ κύκλος γεγράφθω ὁ $\Delta K\Lambda$. πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ τῷ $H\Theta$ κύκλος γεγράφθω ὁ $K\Lambda\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KZ, KH . λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς A, B, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ KZH .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Delta K\Lambda$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $Z\Delta$ τῇ ZK . ἀλλὰ ἡ $Z\Delta$ τῇ A ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ A ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Lambda K\Theta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ HK . ἀλλὰ ἡ $H\Theta$ τῇ Γ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ

ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ. δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἐκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα
σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν
εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ,
τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν
μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ
ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι
εἰσὶν ἐκατέρα ἐκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ
ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΗ
ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς
αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ
τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ
ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ'.

**Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο
πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, τὴν δὲ**

**γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν
ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν
τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.**

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο
πλευρὰς τὰς AB , $A\Gamma$ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔE ,
 ΔZ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρῳ, τὴν μὲν AB τῇ
 ΔE τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ , ἡ δὲ πρὸς τῷ A γωνία τῆς
πρὸς τῷ Δ γωνίας, μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ
βάσις ἡ $B\Gamma$ βάσεως τῆς EZ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῆς ὑπὸ
 $E\Delta Z$ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔE εὐθείᾳ καὶ
τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία ἴση
ἡ ὑπὸ $E\Delta H$, καὶ κείσθω ὁποτέρῳ τῶν $A\Gamma$, ΔZ ἴση ἡ
 ΔH , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EH , ZH .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ $A\Gamma$ τῇ
 ΔH , δύο δὲ αἱ BA , $A\Gamma$ δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔH ἴσαι εἰσὶν
ἑκατέρῳ ἑκατέρῳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῇ

ὕπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῶ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρα, τὴν δὲ

**βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχη, καὶ τὴν γωνίαν
τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων
εὐθειῶν περιεχομένην.**

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο
πλευρὰς τὰς AB , $A\Gamma$ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔE ,
 ΔZ ἴσας ἔχοντα ἐκατέρωθεν ἐκατέρω, τὴν μὲν AB τῇ
 ΔE , τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ . βάσις δὲ ἡ $B\Gamma$ βάσεως τῆς
 EZ μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$
γωνίας τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων. ἴση
μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$. ἴση
γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ EZ . οὐκ ἔστι
δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῇ ὑπὸ
 $E\Delta Z$. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῆς
ὑπὸ $E\Delta Z$. ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ $B\Gamma$
βάσεως τῆς EZ . οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων
ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$. ἐδείχθη δέ,

ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς
ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ
πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκάτερα, τὴν δὲ
βασὶν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς
γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν
περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ
γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκάτερα καὶ μίαν
πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ᾗτοι τὴν πρὸς ταῖς
ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν
τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς
ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει [ἐκατέραν
ἐκάτερα] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ
γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔEZ , $EZ\Delta$ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρω, τὴν μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔEZ , τὴν δὲ ὑπὸ $B\Gamma A$ τῇ ὑπὸ $EZ\Delta$. ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν $B\Gamma$ τῇ EZ . λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρω, τὴν μὲν AB τῇ ΔE , τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ , καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ τῇ ὑπὸ EAZ .

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ AB τῇ ΔE , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ AB , καὶ κείσθω τῇ ΔE ἴση ἡ BH , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $H\Gamma$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BH τῇ ΔE , ἡ δὲ $B\Gamma$ τῇ EZ , δύο δὲ αἱ BH , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $HB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ $H\Gamma$ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $HB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ

ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς
γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἅς αἱ ἴσαι πλευραὶ
ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ
ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση·
καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ
ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ
τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι
εἰσὶν ἐκατέρω ἐκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ
γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστίν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ
βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ
τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας
πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. λέγω
πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς
πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ
ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ
γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν
 μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ
 κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο
 δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω
 ἑκατέρω· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα
 ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον
 τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι
 ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἃς αἱ ἴσας
 πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ
 γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ
 ἐστὶν ἴση· τριγώνου δὲ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ
 ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ
 ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ
 τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο
 δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω
 ἑκατέρω· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ
 ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ

ΔΕΖ τριγώνω ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ἢ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ
λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ
γωνίαις ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρᾳ καὶ μίαν
πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἦτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις
γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων
γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς
πλευραῖς ἴσας ἔξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ
λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

**Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς
ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ,
παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.**

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα
ἐμπίπτουσα ἢ ΕΖ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ
ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω. λέγω ὅτι

παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB , $\Gamma\Delta$
συμπεσοῦνται ἥτοι ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ A , Γ .
ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ B , Δ
μέρη κατὰ τὸ H . τριγώνου δὴ τοῦ HEZ ἡ ἐκτὸς
γωνία ἡ ὑπὸ AEZ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ
ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EZH . ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
οὐκ ἄρα αἱ AB , $\Delta\Gamma$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται
ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη. Ὅμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι
οὐδὲ ἐπὶ τὰ A , Γ . αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερον τὰ μέρη
συμπίπτουσιν παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος
ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα
τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ,
παράλληλοι ἔσσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη´.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν

ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἴσην ποιεῖτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ $AH\Theta$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ ἄρα τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ ταῖς ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$

ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφηγήσθω ἢ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ
ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ
εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα
τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ
τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ
αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι
ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

**Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα
ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας
ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ
ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.**

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ
εὐθεῖα ἐμπίπτέτω ἡ ΕΖ. λέγω ὅτι τὰς ἐναλλάξ

γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν
ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ
ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ
τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς
ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ,
μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ.
κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ,
ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ
ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα
ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ
δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς
ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ
ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ
συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτάς
ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ
ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ
ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν

ἴση· κοινὴ προσκείσθω ἢ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἐκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ

εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθεῖα παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ

εὐθεία καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ
γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ’
εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἢ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα
ἐμπίπτουσα ἢ ΑΔ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ
ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος
ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ
εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἢ
ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λβ’.

**Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν
προσεκβληθείσης ἢ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς
ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς
τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι
εἰσίν.**

Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ $B\Gamma$ ἐπὶ τὸ Δ . λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓAB , $AB\Gamma$. καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓE .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓE , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ $ΑΓ$, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $BA\Gamma$, $ΑΓ E$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓE , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ $B\Delta$, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $E\Gamma\Delta$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓ E$ τῇ ὑπὸ $BA\Gamma$ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ $BA\Gamma$, $AB\Gamma$.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΑΓ B$. αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΓΔ$,

ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐστῶσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπι- ζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὲ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρω ἐκατέρω, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ'.

**Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ
ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι
ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα
τέμνει.**

Ἐστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ,
διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ. λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ
παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ
γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος
αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς
αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι
αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ
παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς
ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ,
ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ
ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ

ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρω
καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς
ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς
ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν
ἑκατέρω καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ·
ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ,
καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ, καὶ
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ,
ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ
ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ
ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ
ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις
εἰσίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.
ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο
δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω
ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ

ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ
τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ
παραλ- ληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

**Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς
βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις
ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.**

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ
τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ
ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση
ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ
ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ
ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλη τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ

καὶ ἡ AB τῇ $\Delta\Gamma$ ἴση· δύο δὲ αἱ EA , AB δύο ταῖς $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $Z\Delta\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ EAB ἐστὶν ἴση ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσις ἄρα ἡ EB βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ EAB τρίγωνον τῷ $\Delta Z\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΔHE · λοιπὸν ἄρα τὸ $ABHD$ τραπέζιον λοιπῷ τῷ $EH\Gamma Z$ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ $HB\Gamma$ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ $EB\Gamma Z$ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσιν ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις

ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς AD , $B\Gamma$. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ AD ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ E , Z , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῇ GA παράλληλος ἦχθω ἡ BE , διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ $B\Delta$ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓZ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$. καὶ εἰσιν ἴσα· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $B\Gamma$, EZ . καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $EB\Gamma A$

παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον· ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ $\Delta B\Gamma Z$ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον· ἡ γὰρ $\Delta\Gamma$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν $B\Gamma$, EZ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ , AD . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ AD ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ

τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως

**ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
παραλλήλοις ἐστίν.**

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς
βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς $B\Gamma$. λέγω
ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $A\Delta$. λέγω ὅτι παράλληλός
ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῇ $B\Gamma$.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ A σημείου τῇ $B\Gamma$ εὐθεία
παράλληλος ἡ AE , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $E\Gamma$. ἴσον ἄρα
ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $EB\Gamma$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ
τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς
αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ $AB\Gamma$ τῷ $\Delta B\Gamma$ ἐστὶν
ἴσον· καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ ἄρα τῷ $EB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ μείζον
τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα
παράλληλός ἐστὶν ἡ AE τῇ $B\Gamma$. ὁμοίως δὲ
δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς $A\Delta$ · ἡ $A\Delta$ ἄρα
τῇ $B\Gamma$ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως
ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ'.

[Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα
καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
παραλλήλοις ἐστίν.]

μα'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε
ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις
ἦ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ
τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ
ΕΒΓ βάσιν τε ἔχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς
αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ. λέγω ὅτι

διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δὴ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ´.

**Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ**

δοθείση γωνία εὐθυγράμμω.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ . δεῖ δὴ τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

Τετμήσθω ἡ $B\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $E\Gamma$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ E τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓEZ , καὶ διὰ μὲν τοῦ A τῇ $E\Gamma$ παράλληλος ἦχθω ἡ AH , διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ EZ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓH . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ZE\Gamma H$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ $E\Gamma$, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ $AE\Gamma$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BE , $E\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $B\Gamma$, AH . διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τοῦ $AE\Gamma$ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ $ZE\Gamma H$ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ $AE\Gamma$

τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἣτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα

παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστὶν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει

δείξαι.

μδ'.

**Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι
τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον
παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ
εὐθυγράμμῳ.**

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν
τρίγωνον τὸ Γ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος
ἡ Δ . δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ
δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον
παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον τὸ $BEZH$ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ
 EBH , ἥ ἐστὶν ἴση τῇ Δ . καὶ κείσθω ὥστε ἐπ'
εὐθείας εἶναι τὴν BE τῇ AB , καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ
τὸ Θ , καὶ διὰ τοῦ A ὁποτέρῳ τῶν BH , EZ

παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ.
 καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα
 ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι
 δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ
 δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ
 ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον
 ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα
 ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ
 συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου
 ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΛ,
 καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ
 σημεία. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ,
 διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ
 παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ
 λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα
 ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν
 ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση
 ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ

ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνία ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΒ ἐν γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με΄.

**Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ
δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμῳ.**

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνία τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ

ὑπὸ ΘΚΖ γωνία, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ Ε· καὶ
 παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ
 τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ
 ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ Ε. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε
 γωνία ἐκατέρω τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστὶν ἴση, καὶ
 ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστὶν ἴση. κοινὴ
 προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ
 ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ,
 ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ,
 ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. πρὸς δὴ τινι
 εὐθείᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο
 εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι
 τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ'
 εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· καὶ ἐπεὶ εἰς
 παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ,
 αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι
 ἀλλήλαις εἰσὶν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ
 ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι

εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι
 εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι
 εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ
 ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ
 καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ
 παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς
 εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ
 παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον
 τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ,
 ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ
 παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον
 παραλ- ληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν
 γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε·
 ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB . δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἦχθω τῇ AB εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ A πρὸς ὀρθὰς ἡ AG , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ AD . καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ DE , διὰ δὲ τοῦ B σημείου τῇ AD παράλληλος ἤχθω ἡ BE . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ADEB$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ DE , ἡ δὲ AD τῇ BE . ἀλλὰ ἡ AB τῇ AD ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ BA , AD , DE , EB ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ADEB$ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς AB , DE εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ AD , αἱ ἄρα ὑπὸ BAD , ADE γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BAD .

ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ
παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον
πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ
ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ,
ΒΕΔ γωνιῶν.

Ὁρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ
ἰσόπλευρον. τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καὶ ἐστὶν ἀπὸ
τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει
ποιῆσαι.

μζ'.

**Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς
τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς
τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν
γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.**

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν
ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς

ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὀποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δὲ τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρᾳ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλη τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὲ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ

ἴση· βάσις ἄρα ἡ $ΑΔ$ βάσει τῇ $ΖΓ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον τῷ $ΖΒΓ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $ΑΒΔ$ τριγώνου διπλάσιον τὸ $ΒΛ$ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν $ΒΔ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς $ΒΔ$, $ΑΛ$ · τοῦ δὲ $ΖΒΓ$ τριγώνου διπλάσιον τὸ $ΗΒ$ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν $ΖΒ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς $ΖΒ$, $ΗΓ$ · ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΒΛ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΗΒ$ τετραγώνῳ· ὁμοίως δὲ ἐπιζευγνυμένων τῶν $ΑΕ$, $ΒΚ$ δειχθήσεται καὶ τὸ $ΓΛ$ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ $ΘΓ$ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ $ΒΔΕΓ$ τετράγωνον δυσὶ τοῖς $ΗΒ$, $ΘΓ$ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $ΒΔΕΓ$ τετράγωνον ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ ἀναγραφέν, τὰ δὲ $ΗΒ$, $ΘΓ$ ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεينوῦσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη΄.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ

πρὸς ὀρθὰς ἡ AD καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ AD , καὶ
 ἐπεζεύχθω ἡ DG . ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ DA τῇ AB , ἴσον
 ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς DA τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς
 AB τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς
 AG τετραγώνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν DA , AG
 τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AG
 τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν DA , AG ἴσον
 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς DG · ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $DAΓ$
 γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BA , AG ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς $BΓ$ · ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς DG
 τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τετραγώνῳ·
 ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $DΓ$ τῇ $BΓ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ
 ἴση ἐστὶν ἡ DA τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ AG , δύο δὲ αἱ DA ,
 AG δύο ταῖς BA , AG ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσεις ἡ $DΓ$
 βάσει τῇ $BΓ$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $DAΓ$ γωνία τῇ
 ὑπὸ $BAΓ$ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $DAΓ$ · ὀρθὴ ἄρα
 καὶ ἡ ὑπὸ $BAΓ$.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν

τετράγωνον ἴσον ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ
τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἢ
περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ
τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν· ὅπερ ἔδει
δεῖξαι.

GLOSSARIO

In un primo studio è conveniente, leggere rapidamente i *postulati* e le *nozioni comuni*, e poi subito la prima proposizione (p. 6), tralasciando le lunghe spiegazioni dei *termini geometrici*, poiché esse, pur avendo avuto ragione di essere per i greci, sono poco utili a noi, ai quali questi termini sono notissimi e fanno oramai parte della lingua comune.

Per facilitar l'uso di questo glossario, sono perciò state escluse le parole, appartenenti alla lingua comune dei greci, le quali compaiono soltanto nelle pp. 115-118.

Dei verbi sono date le varie forme adoperate nel testo, sotto la forma dell'infinito presente. Delle altre parole è data soltanto una delle forme

adoperate.

ἄγειν condurre

ἤχθω, ἤχθωσαν, ἤκται, ἀγαγεῖν

αἰτεῖν domandare

ῥητήσθω

αἰτήματα postulati

ἀδύνατον impossibile

ἄλλά ma

ἀλλήλους l'un l'altro

ἀναγράφειν costruire

ἀναγεγράφθω, ἀναγράψαι, ἀναγραφέν,

ἀναγεγραμμένον

ἄνισος diseguale

ἄπειρος infinito

ἄπεναντίον opposto

ἀπό da

ἄρα dunque

ἀρχή principio

ἄτοπος assurdo

αὐτός stesso

ἀφαιρεῖν togliere

ἀφαιρεθῇ, ἀφηγήσθω, ἀφήρηται, ἀφελεῖν

βάσις base

γάρ poiché

γράφειν descrivere

γράφεσθαι, γεγράφθω

γραμμή linea

γωνία angolo

δέ poi, dunque

δεικνύναι dimostrare

δείξομεν, δείξαι, ἐδείχθη, ἐδείχθησαν,

δειχθήσεται

δεῖν esser necessario

δεῖ, ἔδει

διά per

διάγειν condurre

διήχθω

διάμετρος diagonale, diametro

διάστημα distanza

διδόναι dare

δοθέν, δοθέντος, δοθέντι, δοθείσα, δοθείσης,

δοθείση, δοθείσαν, δοθείσαι, δοθειςών,

δοθείσαις

διπλάσιος doppio

δίχα per metà

δυνατόν possibile

δύο due

ἐάν se

εἴ se

εἶναι essere

ἐστίν, εἰσίν, ἔστω, ἔστωσαν, ἔσται, ἔσονται,

ὧσιν, ἦ, ὄντα

εἰς verso

ἐκάτερος l'uno e l'altro

ἐκ da

ἐκτός fuori

ἐκβάλλειν prolungare

ἐκβεβλήσθω, ἐκβεβλήσθωσαν, ἐκβαλεῖν,

ἐκβαλλομένας, ἐκβαλλομέναι

ἐκκεῖσθαι esser preso

ἐκκείσθω

ἐλάσσων minore

ἐμπίπτειν incontrare

ἐμπιπτέτω, ἐμπέπτωκεν, ἐνέπεσεν,

ἐμπίπτουσα

ἐν in

ἐντός entro

ἐναλλάξ alternamente

ἔννοια nozione

ἐξ da

ἐπεὶ poiché

ἐπί su, per

ἐπιζευγνύναι congiungere

ἐπιζευγνύουσιν, ἐπεζεύχθω, ἐπεζεύχθωσαν,

ἐπιζευγνύτωσαν, ἐπιζευγνύτωσαν,

ἐπιζευχθεῖσα, ἐπιζευγνυμένων,

ἐπιζευγνύουσαι

ἕτερος altro

εὐθεία retta

εὐθύγραμμον rettilineo

ἐφαρμόζειν coincidere

ἐφαρμόζοντα, ἐφαρμοζομένες,

ἐφαρμοζομένου, ἐφαρμόσει, ἐφαρμοσάσης,

ἐφαρμόσαντος, ἐφαρμόσουσιν

ἐφεξῆς di seguito

ἐφιστάναι erigere

ἐφέστηκεν, ἐφεστηκυῖα

ἔχειν avere

ἔχει, ἔχουσιν, ἐχέτω, ἔχη, ἔχον, ἔχοντα,

ἔχουσιν, ἔχουσαι, ἔξει
ἢ che
ἥμισυ metà
ἦτοι onvero
ἴσος eguale
ἰσόπλευρον equilatero
ἰσοσκελές isoscele
κάθετος cateto
καί e
καλεῖν chiamare
καλεῖται
κατά per, ad
καταλειπόμενον rimanente
κεῖσθαι esser posto
κείσθω, κείμεναι
κέντρον centro
κοινή comune
κορυφή vertice

κύκλος *circolo*

λαμβάνειν *prendere*

εἰλήφθω

λέγειν *dire*

λέγω, λέγόμενα

λείπειν *lasciare*

λοιπός *resto*

μείζων *maggiore*

μέν *pure, bensì*

μέρος *parte*

μετά *con*

μεταλαμβάνειν *permutare*

μεταλαμβανόμεναι, μεταλαμβανομένας

μή *non*

μηδέτερος *nessun dei due*

μία *una*

νῦν *ora*

ὁ *il*

ὅλος intero

ὁμοίως similmente

ὀξύς acuto

ὅπερ ciò che

ὁπότερος qual dei due

ὀρθογώνιος ortogonale, rettangolare

ὀρθός retto

ὅταν quando

ὅτι che

ὅς il quale, che

οὐδέ né

οὐθέν niente

οὐ(κ) non

οὖν dunque

πάλιν di nuovo

παῖς tutto

παρά ad

παραβάλλειν applicare παραβάλλειν

παραβεβλήσθω, παραβέβληται, παραβαλεῖν
παράλληλόγραμμον parallelogrammo
παράλληλος parallelo
παραπλήρωμα complemento
πεπερασμένη terminata
περί intorno
περιέχειν comprehendere
 περιέχουσιν, περιέξουσιν, περιεχουσῶν,
 περιεχομένη, περιεχομένην
πλευρά lato
πλήν eccetto
πολύς molto
ποιεῖν fare
 ποιεῖ, ποιοῦσιν, ποιῇ, ποιῶσιν, ποιείτω,
 ποιείτωσαν, ποιῆσαι, ποιήσει, πεποίηκεν
πρός verso
προσεκβάλλειν prolungare
 προσεκβεβλήσθω, προσεκβεβλήσθωσαν,

προσεκβληθείσες, προσεκβληθεισών
προσκεῖσθαι essere aggiunto
προσκεῖσθω
προστιθέναι aggiungere
προστεθῇ
σημεῖον punto
σταθεῖσα eretta
συμπίπτειν concorrere
συμπίπτουσιν, συμπίπτουσai, συμπεσοῦνται,
συμπιπτέτωσαν
συνιστάναι costruire
συνεστάτω, συνέσταται, συνεστάτωσαν,
συνίστανται, συστήσασθαι, συσταθῶσιν,
συσταθῆσονται, συσταθεῖσαι
συνεχές continuo
σχῆμα figura
τέμνειν dividere
τέμνει, τέμνουσιν, τέμνωσιν, τετμήσθω,

τετμηται, τεμείν, τετμημένες
τέσσαρες quattro
τετράγωνον quadrato
τιθέναι porre
θέσθαι, τιθεμένου
τίς alcuno
τραπέζιον trapezio
τρεις tre
τρίγωνον triangolo
τυχόν a caso
ὑπερέχειν superare
ὑπό da
ὑποκεῖσθαι supporre
ὑπόκειται
ὑποτείνειν sottendere
ὑποτείνει, ὑποτείνουσιν, ὑποτείνουσα,
ὑποτείνούσης, ὑποτείνουσιν, ὑποτείνουσαι
χωρίον spazio

ὥς come

ὥστε sicché