



I S E M P R E V E R D E

EUCLIDES



Elementi. Libro primo

ATHENA
EDIZIONI

Athena Edizioni ti regala questo libro in formato cartaceo, stampato e spedito gratuitamente a casa tua. Infatti per ogni libro acquistato dal sito potrai scegliere un libro della collana Sempreverde in omaggio. Visita edizioniathena.it per maggiori informazioni.

ELEMENTI

LIBRO I

I.

Termini¹

1. PUNTO è ciò che non ha parti.
2. LINEA una lunghezza senza larghezza.
3. ESTREMI DI UNA LINEA son punti.
4. LINEA RETTA è quella che è posta in pari rispetto ai suoi

¹ Traduco con *termini*, il greco ὅροι piuttosto che con *definizioni*, come si fa comunemente, perché queste prime pagine introduttorie, invece che *definizioni matematiche*, sono piuttosto chiarimenti o spiegazioni analoghe a quelle che si danno oggi nei dizionari. Queste prime pagine contenenti queste prime spiegazioni, i *postulati* e le *nozioni comuni*, sono state, con tutta probabilità, assai alterate e deformate durante i molti secoli nei quali questo libro fu adoperato nelle scuole. È lecito supporre che le pagine introduttorie originarie fossero tanto eleganti e sobrie quanto son quelle che si trovano premesse agli scritti di Archimede e di Apollonio.

punti.

5. SUPERFICIE è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

6. ESTREMI DI UNA SUPERFICIE son linee.

7. SUPERFICIE PIANA è quella posta in pari rispetto alle sue rette.

8. ANGOLO PIANO è l'inclinazione di due linee in un piano che si toccano, ma non sono per diritto.

9. Quando le linee comprendenti un angolo son rette, l'angolo si chiama RETTILINEO.

10. Se una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è RETTO, e la retta posta si chiama PERPENDICOLARE a quella su cui è stata posta.

11. ANGOLO OTTUSO è quello maggiore di un retto.

12. ACUTO è quello minore di un retto.

13. TERMINE è l'estremo di qualche cosa.

14. FIGURA è ciò che è compreso da uno o più termini.

15. CIRCOLO è una figura piana, compresa da una sola linea, tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto entro la figura, sono eguali tra loro.

16. CENTRO DEL CIRCOLO si chiama quel punto.

17. DIAMETRO DEL CIRCOLO è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti alla circonferenza del circolo, la quale divide anche il circolo per metà.

18. SEMICIRCOLO è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata.

Il centro del semicircolo è lo stesso del centro del circolo.

19. FIGURE RETTILINEE son quelle comprese da rette, TRILATERE da tre, QUADRILATERE da quattro, MULTILATERE quelle comprese da più di quattro.

20. Tra le figure trilatera è TRIANGOLO EQUILATERO quello che ha i tre lati eguali; ISOSCELE quello che ha due soli lati eguali; SCALENO quello che ha i tre lati diseguali.

21. Inoltre tra le figure trilatera, è TRIANGOLO RETTANGOLO quello che ha un angolo retto, OTTUSANGOLO quello che ha un angolo ottuso, ACUTANGOLO quello che ha i tre angoli acuti.²

22. Tra le figure quadrilatera è QUADRATO quella che è equilatera e rettangola; OBLUNGO quella che è rettangola ma non equilatera; ROMBO quella che è equilatera ma non rettangola; ROMBOIDE quella che ha i lati e gli angoli opposti eguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola; si chiamino TRAPEZII³ tutti gli altri quadrilateri.

23. PARALLELE sono rette, le quali sono nello stesso piano, e

² Si notino le inaspettate definizioni di triangolo *scaleno*, e di triangolo *acutangolo*, le quali obbligano subito a riflettere, chi per la prima volta sente parlare di geometria.

³ L'uso di chiamar *trapezii* i quadrilateri aventi due lati paralleli è posteriore ad Euclide.

prolungate all'infinito da ognuna delle due parti, da nessuna delle due parti si incontrano tra loro.⁴

Postulati.

1. Si ammetta di poter tirare da ogni punto ad ogni [altro] punto, una linea retta;
2. e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;
3. e con ogni centro e con ogni distanza, descrivere un circolo;
4. e che tutti gli angoli retti sono eguali tra loro;
5. e che se una retta incontrando due rette, fa gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito, si incontrano da quella parte nella quale gli angoli son minori di due retti.⁵

⁴ Si noti che dire che due rette nello stesso piano incontrate da un'altra retta, si incontrano tra loro, val quanto dire che le tre rette formano un triangolo; e che invece il dire che due rette nello stesso piano incontrate da una terza non s'incontrano tra loro, val quanto dire che esse sono parallele, ovvero val quanto dire che le tre rette non formano un triangolo.

⁵ Questo postulato è adoperato per la prima volta nella proposizione (29).

Nozioni comuni.⁶

1. Le cose eguali ad una stessa, sono eguali tra loro.
2. E se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i tutti sono eguali.
3. E se da cose eguali si tolgono cose eguali, i resti sono eguali.
4. E le cose sovrapponentisi l'una sull'altra, sono eguali tra loro.⁷

⁶ La parola *assiomi* non è adoperata da Euclide. Aristotile li aveva chiamati *κοινὰ δόξαι*, *opinioni comuni*, suggerendo così forse la frase Euclidea.

⁷ Euclide adopera nella (4) anche la proposizione inversa che cioè *cose eguali tra loro si possono sovrapporre l'una sull'altra*. La distinzione tra *eguaglianza* e *sovrapponibilità* è assai sottile.

Euclide però non fa una teoria generale della *sovrapposizione*. Una teoria completa della *congruenza* (ovvero sovrapponibilità delle figure) è stata costruita da PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, ed esposta con molte semplificazioni da G. PEANO, *Sui fondamenti della geometria*, Riv. di Mat., 1894, t. 4 p. 75 e segg.

A me sembra però preferibile, quando si voglia fare questa distinzione, conservare alla parola *eguali* il senso che essa ha nella

5. E il tutto è maggior della parte.

logica, ricorrendo invece che alla creazione di una nuova *relazione* di *congruenza*, ad una frase un po' più complessa come *eguali in forma, di egual figura*, etc.

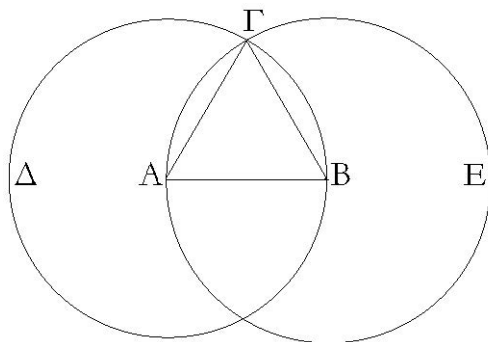
Nelle citazioni, i *termini* si indicheranno così: (T 10); i *postulati*, così: (P 3); le *nozioni comuni* così (C 2); e le *proposizioni* col semplice numero (17).

LIBRO PRIMO

1. — *Sopra una retta data terminata, costruire un triangolo equilatero.*⁸

Sia AB la retta data terminata.

Si deve sulla retta AB costruire un triangolo equilatero.



Con centro A e distanza AB si descriva (P3) il circolo $BΓΔ$, e di nuovo con centro B e distanza BA si descriva (P3) il circolo

$AΓE$, e dal punto $Γ$ in cui i circoli si tagliano tra loro, si conducano (P1) ai punti A, B le rette $ΓA, ΓB$.

⁸ Si è obiettato a questa dimostrazione e a quella della successiva (22), che in esse Euclide ammette come evidente, che *se un circolo ha il centro su di un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia*. Si è tentato di dimostrare recentemente questa proposizione per mezzo di altri postulati, assai più complicati. Sembra però più semplice l'ammettere tacitamente questa proposizione, come parve evidente ad Euclide.

E poiché il punto A è centro del circolo ΓAB , la AI è eguale (T15) alla AB . E di nuovo, poiché il punto B è centro del circolo ΓAE , la BI è eguale alla BA (T15). Ma si è già dimostrato che ΓA è eguale alla AB . Dunque ognuna delle ΓA , ΓB è eguale alla AB . Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C1), dunque la ΓA è eguale alla ΓB . Dunque le tre ΓA , AB , ΓB sono eguali tra loro.

Dunque il triangolo ABI è equilatero ed è costruito sulla retta data terminata AB , come dovevasi fare.

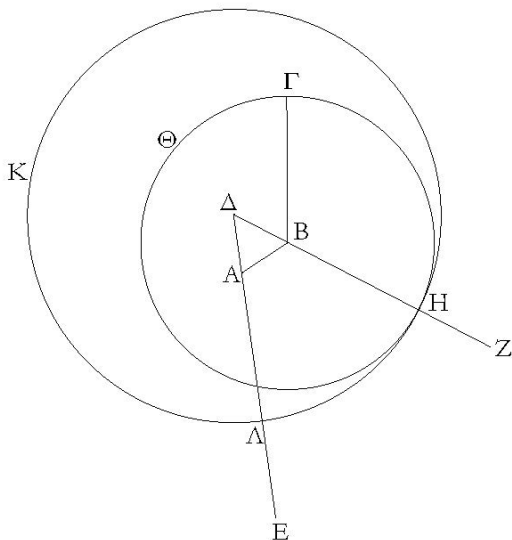
2. — *Ad un dato punto apporre una retta eguale ad una data retta.*⁹

⁹ Questa proposizione ha molti casi, già analizzati da Proclo. A seconda della disposizione delle figure occorre cambiare alcune parole nella dimostrazione. Si può però sempre ridursi al caso esposto da Euclide. È infine da osservarsi che in altre proposizioni (per es. nella 7) Euclide sviluppa soltanto il caso più difficile.

L'interesse di questa proposizione è duplice. Essa è anzitutto una elegante applicazione della proposizione precedente e delle nozioni comuni. In secondo luogo essa rende inutile il *trasporto* di una retta nel piano, potendosi supporre con A. De Morgan, che il *compasso* adoperato da Euclide, sia così fatto che chiuda le punte, appena cessi di toccar la carta, e che la riga sia così fatta che su di essa non si possano far segni.

Sia A il punto dato, e sia $B\Gamma$ la retta data. Si deve al punto A apporre una retta eguale alla retta data $B\Gamma$.

Si conduca infatti dal punto A al punto B la retta AB (P1), e si costruisca su di essa il triangolo equilatero $\triangle AB$ (1), e si prolunghino per diritto (P2) alle $\angle A$, $\angle B$ le rette AE , BZ , e con centro B e distanza $B\Gamma$ si descriva il circolo $\Gamma H\Theta$ (P3), ed ancora con centro $\angle$ e distanza $\angle H$ si descriva (P3) il circolo $HK\angle$.



Poiché il punto B è centro del circolo $\Gamma B\Theta$, la $B\Gamma$ è eguale alla BH . Ed ancora poiché il punto $\angle$ è centro del circolo $HK\angle$, la $\angle A$ è eguale alla

$\angle H$, delle quali la parte $\angle A$ è eguale alla $\angle B$. Dunque il resto $A\Delta$ è eguale al resto BH (C3). Ma si è dimostrato che la $B\Gamma$ è eguale alla BH . Dunque ognuna delle due $A\Delta$, $B\Gamma$ è eguale alla

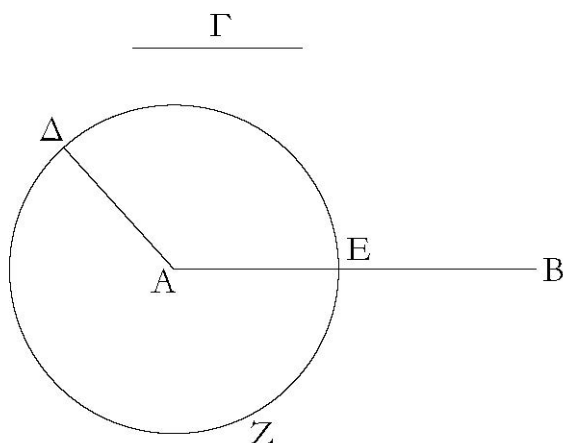
BH . Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C1), e perciò la AA è eguale alla BT .

Dunque al punto dato A si è apposta la AA , eguale alla retta data BT , come dovevasi fare.

3. — *Date due rette diseguali, dalla maggiore tagliare una retta eguale alla minore.*¹⁰

Siano AB , Γ le due rette date diseguali delle quali AB sia la maggiore.

¹⁰ Lo scopo di questa proposizione, come quello della precedente, è di evitare il *trasporto* di una retta nel piano (poiché per mezzo di questo trasporto i problemi (2) e (3) si risolvono immediatamente), e di limitarsi alle operazioni ammesse dai primi tre *postulati*.



Si deve allora dalla maggiore AB tagliare una retta eguale alla Γ . Si apponga al punto A , la AD eguale

alla retta Γ (2), e con centro A e distanza AD si descriva il circolo ΔEZ (P3).

E poiché il punto A è centro del circolo ΔEZ è AE eguale alla AD (T15); ma anche la Γ è eguale alla AD . Dunque ognuna delle AE , Γ è eguale alla AD . Dunque (C1) anche la Γ è eguale alla AE .

Dunque, *date due rette diseguali dalla maggiore si è tagliata una retta eguale alla minore*, come dovevasi fare.

4. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed un angolo eguale ad un angolo, quello cioè compreso dalle rette eguali, avranno anche la base eguale alla base, e il triangolo sarà eguale al triangolo, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, ciascuno a*

*ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali.*¹¹

¹¹ Si noti che nell'enunciato è detto «angolo... compreso dalle rette eguali», e non «compreso dai lati eguali», per conservare la frase adoperata per definire un angolo (T 9).

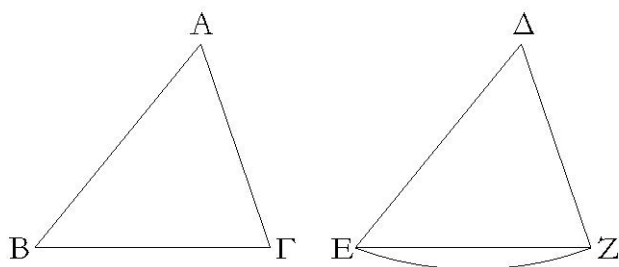
È stato obiettato a questa proposizione che essa implica postulati non formulati, e che è quindi più semplice assumerla tutta intera come un postulato (per es. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, p. 9), ma l'osservazione è antica (IACOBI PELETARII, In *Euclidis Elementa geometrica demonstrationum libri sex*, Lugduni 1557, p. 15: «.... dicamus, hoc Theorema per se clarum esse, neque probatione egere, sed Definitionis cuiusdam loco habendum esse»).

Si osservi però che per mezzo di questa proposizione Euclide, ricorrendo più volte alla nozione comune (C 4), dimostra che la *sovrapposizione* di due triangoli eguali si può fare sovrapponendo soltanto un lato ed un angolo di esso. La dimostrazione di Euclide, accenna assai in scorcio, ad una possibile teoria della *sovrapposizione*.

Questo metodo di dimostrare l'eguaglianza di due figure per sovrapposizione, sembra più antico di Euclide. Infatti Proclo riferisce (HEATH p. 253) che TALETE collo stesso metodo avrebbe dimostrato che ogni diametro taglia il circolo in due parti eguali.

Si noti ancora che la (4) ha una immediata applicazione in agrimensura e in topografia. Se si ha una linea poligonale piana,

Siano i due triangoli, aventi due lati $AB, A\Gamma$ eguali ai due lati $\Delta E, \Delta Z$ ciascuno a ciascuno, e l'angolo $B A \Gamma$ eguale all'angolo $E \Delta Z$.



Dico
che an-
che la
base $B\Gamma$
è eguale
alla base
 EZ , e

che il triangolo $AB\Gamma$ sarà eguale al triangolo ΔEZ , e che i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali, $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ , e $A\Gamma B$ [eguale] a $\Delta Z E$. Infatti sovrapposto il triangolo $AB\Gamma$ al triangolo ΔEZ e posto il punto A sul punto Δ e il lato AB sul lato ΔE , anche il punto B si sovrapporrà al punto E , per essere AB eguale alla ΔE

e di essa si conoscono tutti i lati, e gli angoli che ogni lato fa con quello che lo segue, la linea poligonale è determinata, cioè *due linee poligonali aventi i lati e gli angoli anzidetti ordinatamente eguali, sono eguali.*

La dimostrazione si conduce come quella della (4).

Se si congiunge ogni vertice della poligonale, con quello che lo precede di due posti, si ha una *catena rigida di triangoli*.

(C4 nota). E sovrapposta la AB alla $\angle E$, anche la AF si sovrapporrà alla $\angle Z$ per esser l'angolo BAF eguale a $E\angle Z$. Perciò anche il punto F si sovrapporrà al punto Z per esser di nuovo eguale AF alla $\angle Z$ (C4 nota). Ma anche B è sovrapposto ad E . Perciò anche la base BF si sovrapporrà alla base EZ . Poiché se B è posto su E e F su Z , se la base BF non è sovrapposta alla base EZ , due rette comprenderebbero uno spazio, ciò che è impossibile. Sarà quindi anche la base BF sovrapposta alla base EZ , e sarà ad essa eguale. Dunque anche tutto il triangolo ABF sarà sovrapposto al triangolo $\angle EZ$ e sarà ad esso eguale (C4), ed i restanti angoli saranno sovrapposti ai restanti angoli, e ad essi saranno eguali (C4), cioè ABF eguale a $\angle EZ$, ed AFB eguale a $\angle ZE$.

Dunque, *se due triangoli, etc.*, come dovevasi dimostrare.

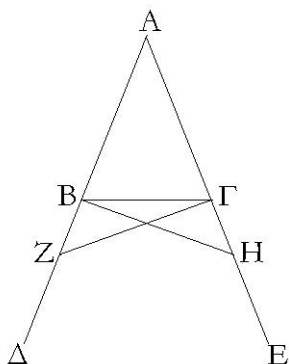
5. — *Gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono eguali tra loro, e, prolungati i lati eguali, gli angoli sotto la base, saranno eguali tra loro.*¹²

¹² Si noti che il ragionamento ha una lieve imperfezione. Infatti a principio della dimostrazione si dice «*si tolga dalla maggiore AE , la AH eguale alla AZ ...*». Come si può esser certi che sia AE maggiore di AZ ? Evidentemente, o *prolungando* quanto occorre la AE , ovvero, il che è lo stesso *prendendo* Z , quanto occorre, vicino a B .

Sia il triangolo isoscele $AB\Gamma$ avente il lato AB eguale al lato $A\Gamma$ e si prolunghino per diritto (P2) ad AB , $A\Gamma$, le rette $B\perp$, ΓE .

Dico che l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma B$, e che anche $\Gamma B\perp$ è eguale a $B\Gamma E$.

Si prenda infatti sulla $B\perp$ un punto a caso Z , e si tolga dalla maggiore AE la AH eguale alla AZ (3), e si conducano le rette $Z\Gamma$, HB (P1).



Poiché dunque AZ è eguale ad AH , ed AB è eguale ad $A\Gamma$, anche le due ZA , $A\Gamma$ sono eguali alle due HA , AB ciascuna a ciascuna, e comprendono l'angolo comune ZAH ; perciò la base $Z\Gamma$ è eguale alla base BH ed il triangolo $AZ\Gamma$ al triangolo AHB , ed i restanti angoli sono eguali ai restanti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè a

Un'altra dimostrazione della prima parte di questa proposizione è stata data da Proclo, il quale suppone che non si prolunghino i lati e si prenda $\perp$ sul lato AB , e questa dimostraz. non è soggetta alla osservazione precedente.

Pappo, secondo quanto Proclo riferisce, dimostrava questa prima parte senza nessuna costruzione, considerando il triangolo $AB\Gamma$, come *due* triangoli sovrapposti etc.

cui sottendono eguali lati (4), cioè $AI'Z$ è eguale ABH , ed AZI è eguale ad AHB . E poichè tutta la AZ è eguale alla AH , ed AB è eguale ad AI , la restante BZ è eguale alla restante $I'H$ (C3). Ma si è dimostrato che anche ZI è eguale a HB .

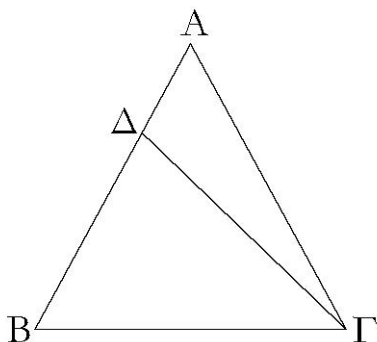
Perciò le due BZ , ZI sono eguali alle due $I'H$, HB ciascuna a ciascuna, e l'angolo BZI è eguale all'angolo $I'HB$, e la loro base BI è comune. Perciò il triangolo BZI sarà eguale al triangolo $I'HB$, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli cioè a cui sottendono lati eguali (4). Quindi l'angolo ZBI è eguale a $I'HB$, e $BI'Z$ è eguale a $I'BH$. Ma poichè tutto l'angolo ABH è stato dimostrato eguale all'angolo $AI'Z$, e di essi la parte $I'BH$ eguale ad $BI'Z$, pure il resto ABI è eguale al resto $AI'B$ (C3); e sono alla base del triangolo ABI . E già si era dimostrato che ZBI è eguale a $I'HB$, i quali sono sotto la base.

Dunque, *gli angoli alla base*, etc. come dovevasi dimostrare.

6. — *Se in un triangolo due angoli sono eguali tra loro, anche i lati sottendenti gli angoli eguali saranno eguali tra loro.*¹³

¹³ In questa proposizione Euclide adopera per la prima volta il metodo di dimostrazione chiamato da ARISTOTELE *riduzione all'assurdo* (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή, *Anal. prior.* I, 7, 29b 5) ovvero *dimostrazione per assurdo* (ἡ διὰ τοῦ ἀδυνάτου ἀπόδειξις,

Sia il triangolo $AB\Gamma$ avente l'angolo $AB\Gamma$ eguale all'angolo $A\Gamma B$.



Dico che anche il lato AB è eguale al lato $A\Gamma$.

Se infatti la AB non è eguale alla $A\Gamma$, una di esse è maggiore. Sia maggiore la AB , e si tolga dalla maggiore AB la ΔB eguale alla minore

(3), e si congiunga la $\Delta\Gamma$. Poiché dunque la ΔB è eguale alla $A\Gamma$ e la $B\Gamma$ è comune, le due AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due $A\Gamma$, $B\Gamma$ ciascuna a ciascuna, e l'angolo $\Delta B\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma B$, dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base AB , ed il triangolo $\Delta B\Gamma$ sarà eguale al triangolo $AB\Gamma$ (4), il minore al maggiore, il che è impossibile.

Dunque non è AB diseguale ad $A\Gamma$, dunque è eguale.

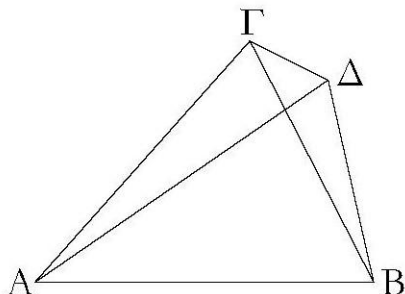
Dunque, *se in un triangolo*, etc. c. d. d.

7. — *Sulla stessa retta, a due stesse rette, non si possono condurre altre due rette, eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi e dalla stessa parte,*

ibid. I, 29, 45a 35), od ancora *dimostrazione conducente all'assurdo* (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἄγουσα ἀπόδειξις, *Anal. post.* I, 24, 85a 16).

*aventi gli stessi estremi delle due prime rette.*¹⁴

Poichè se è possibile, sulla stessa retta AB , alle due stesse rette AI , IB si conducano altre due rette $A\Delta$, ΔB eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi I , Δ e dalla stessa parte, aventi gli



stessi estremi, cosicchè IA sia eguale a ΔA , aventi lo stesso estremo A , e IB sia eguale a ΔB , aventi lo stesso estremo B .

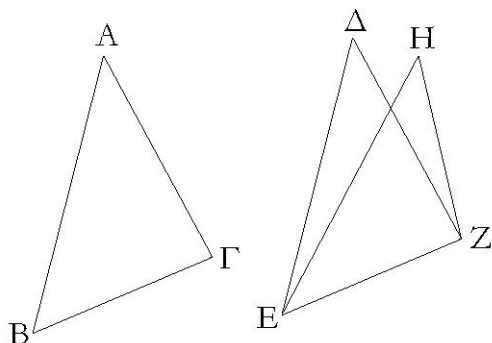
Si conduca la IA .

Poiché dunque AI è eguale ad $A\Delta$, l'angolo AIB è eguale a $A\Delta I$ (5). Dunque $A\Delta I$ è maggiore di ΔIB . E quindi $I\Delta B$ è molto maggiore di ΔIB (C5). Ma ancora, poichè IB è eguale a ΔB , l'angolo $I\Delta B$ è eguale a ΔIB (5). Ma si è dimostrato che è molto maggiore, il che è impossibile.

¹⁴ L'enunciato della (7) tradotto letteralmente è oscuro. I diversi traduttori lo hanno alterato in vari modi. La versione *libera* più semplice, e più vicina al testo greco, ma chiara, sembra la seguente: «A due punti diversi e dalla stessa parte di una stessa retta, non si possono condurre due rette eguali tra loro, da ognuno dei due estremi della retta».

Dunque *sulla stessa retta* etc. c. d. d.

8. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base eguale alla base, avranno anche eguali gli angoli compresi da rette eguali.*¹⁵



Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ aventi i due lati AB , $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE , ΔZ ciascuno a ciascuno, AB

¹⁵ HEATH ha osservato che il testo greco così oscuro, faceva parte probabilmente della fraseologia tradizionale, e perciò sebbene vago, era facilmente capito dai geometri greci. Si trovano infatti enunciati spesso nello stesso modo ellittico ed oscuro, molti teoremi di geometria nelle opere di Aristotele.

Euclide dà soltanto il caso più difficile, in cui si supponga il punto Δ esterno al triangolo $AB\Gamma$. Se Δ si suppone interno al triangolo, con qualche lieve semplificazione si può ripetere la stessa dimostrazione.

eguale a $\angle E$, ed AI a $\angle Z$. Ed abbiano anche la base BI eguale alla base EZ . Dico che anche l'angolo BAI è eguale all'angolo $E\angle Z$.

Infatti sovrapposto il triangolo ABI sul triangolo $\angle EZ$ e posto il punto B sul punto E e la retta BI sulla retta EZ , anche il punto I si sovrapporrà al punto Z per essere BI eguale ad EZ .

Ma sovrapposta la BI sulla EZ , si sovrapporranno anche le BA , AI sulle $E\angle$, $\angle Z$. Poiché se la base BI è sovrapposta alla EZ ed i lati BA , AI non si sovrappongono sui lati $E\angle$, $\angle Z$ ma cadono fuori come in EH , HZ si saranno costruite sulla stessa retta, alle stesse due rette, altre due rette eguali, ciascuna a ciascuna, da due punti diversi e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi delle due prime rette.

Ma non si possono costruire (7); dunque non [è vero che] sovrapposta la base BI sulla base EZ , non si sovrapporranno i lati BA , AI ai lati $E\angle$, $\angle Z$. Dunque si sovrapporranno. Dunque anche l'angolo BAI si sovrapporrà all'angolo $E\angle Z$ e sarà ad esso eguale.

Dunque *se due triangoli*, etc. c. d. d.

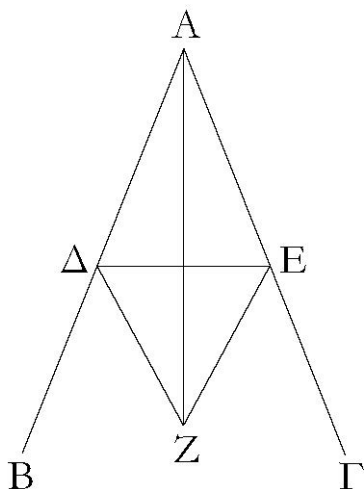
9. — *Dividere per metà un dato angolo rettilineo.*¹⁶

¹⁶ Già ai geometri greci era venuto il desiderio di trovare una

Sia $\angle BAI$ il dato angolo rettilineo; occorre dividerlo per metà.

Si prenda sulla AB a caso il punto $\angle$, e si tolga dalla AI , la AE eguale alla $A\angle$ (3), si conduca la $\angle E$ e sulla $\angle E$ si costruisca il triangolo equilatero $\angle EZ$ (1), e si conduca la AZ .

costruzione per dividere un angolo in tre o in un maggior numero di parti eguali. Non essendovi riusciti, adoperando soltanto rette e cerchi, adopraronο altre curve. NICOMEDE triseccò l'angolo per mezzo della *concoide*, ed ARCHIMEDE per mezzo dell'intersezione di un circolo e di una retta che ruota nel piano, nel suo *Lemma* VIII. IPPIA per mezzo della sua quadratrice, ed ARCHIMEDE colla sua *spirale*, insegnarono a dividere un angolo in qualsivoglia numero di parti eguali. Soltanto i matematici del secolo XIX riuscirono a dimostrare che adoperando un numero finito di intersezioni di rette e di cerchi, non si può trisecare un angolo qualunque.



Dico che l'angolo $BA\Gamma$ è diviso per metà dalla AZ .

Poiché infatti ΔA è eguale alla AE , ed AZ è comune, le due ΔA , AZ sono eguali alle due EA , AZ ciascuna a ciascuna. E la base ΔZ è eguale alla base EZ . Perciò l'angolo ΔAZ è eguale all'angolo

EAZ (8).

Dunque il dato angolo rettilineo $BA\Gamma$ è diviso per metà dalla retta AZ , come dovevasi fare.

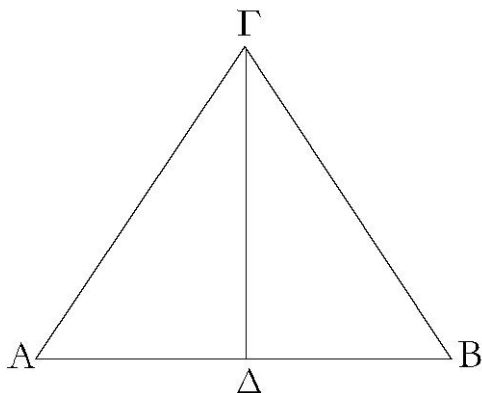
10. — *Dividere per metà una data retta terminata.*¹⁷

Sia AB la retta data terminata; occorre dunque dividerla per metà.

¹⁷ Il problema analogo a quello della *trisezione* di un angolo, è la trisezione di una retta. Essa non può farsi senza ricorrere al postulato delle parallele (P5). La dimostrazione di questa impossibilità però non è semplice, cfr. nota alla (34).

Si costruisca su di essa il triangolo equilatero $A\Gamma B$ (1), e si divida per metà l'angolo $A\Gamma B$ colla retta $\Gamma\Delta$ (9).

Dico che la AB è divisa per metà nel punto Δ .



Infatti la $A\Gamma$ è eguale alla ΓB , la $\Gamma\Delta$ è comune, e le due $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ sono eguali alle due $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$.

Perciò la base $A\Delta$ è eguale alla base $B\Delta$ (4).

Dunque la data retta terminata AB è divisa in Δ , c.d. f.

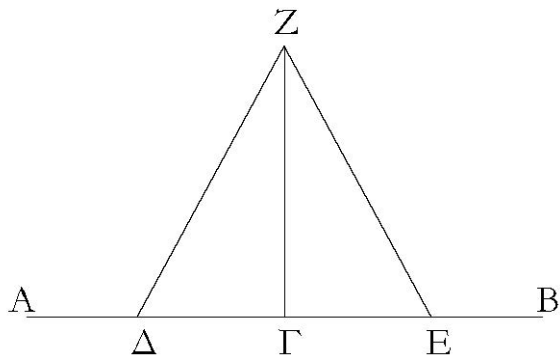
11. — *Ad una retta data, da un punto dato su di essa condurre una linea retta ad angolo retto.*¹⁸

¹⁸ A. DE MORGAN ha osservato che se, come oggi talvolta si fa, si includono gli angoli *piatti* tra gli angoli formati da due rette, (T 10) la (11) diventa un caso particolare della (9), la costruzione essendo la stessa.

Sia AB la retta data, e sia Γ il punto dato su di essa. Si deve dunque dal punto Γ condurre alla retta AB una retta ad angolo retto.

Si prenda su AB un punto a caso Δ , e si prenda ΓE eguale a $\Gamma \Delta$ (2), e su ΔE si costruisca un triangolo equilatero (1), e si conduca la $Z\Gamma$.

Dico che alla retta data AB , dal punto Γ dato su di essa, è stata condotta, ad angolo retto, la retta $Z\Gamma$.



Poiché infatti $\Delta\Gamma$ è eguale a ΓE e ΓZ è comune, le due rette $\Delta\Gamma$, ΓZ sono eguali alle due $E\Gamma$, ΓZ cia-

scuna a ciascuna. E la base ΔZ è eguale alla base ZE . Perciò l'angolo $\Delta\Gamma Z$ è eguale all'angolo $E\Gamma Z$, e sono adiacenti (8). Ma quando una retta posta sopra una retta fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto (T 10).

Perciò $\Delta\Gamma Z$, $Z\Gamma E$ sono retti.

Perciò alla retta data AB dal punto dato su di essa Γ si è condotta la retta ΓZ ad angolo retto, c. d. f.

12. — *Ad una data retta infinita, da un punto dato che non è su di*

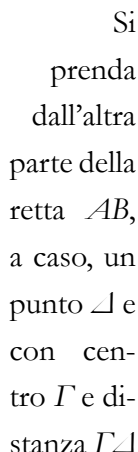
*essa, condurre una linea retta perpendicolare.*¹⁹

Sia AB la retta infinita data e sia Γ il punto che non è su di essa.

Si deve dunque condurre alla retta data infinita AB , dal punto dato Γ che non è su di essa, una linea retta perpendicolare.

¹⁹ EUCLIDE suppone tacitamente che il circolo EZH tagli la retta AB in due, ed in due soli punti. A questa supposizione si può anche dare la forma seguente: *Ogni retta condotta per un punto interno ad un circolo, lo taglia in due punti.* Infatti, poiché si è preso $\angle$ dall'altra parte di AB , la retta $\Gamma\angle$ taglia AB in un punto interno al circolo, ed AB è condotta per questo punto.

Tale supposizione, sebbene sia facilmente ammessa da chi comincia a studiare geometria, si può dedurre dalle proposizioni precedenti (come ha dimostrato HEATH, p. 273-274). Già PRO-CLO aveva tentato dimostrare che il circolo non incontra la retta in *più di due* punti.



Dico che alla retta data infinita AB , dal punto Γ che non è su di essa, è stata condotta la perpendicolare $\Gamma\Theta$.

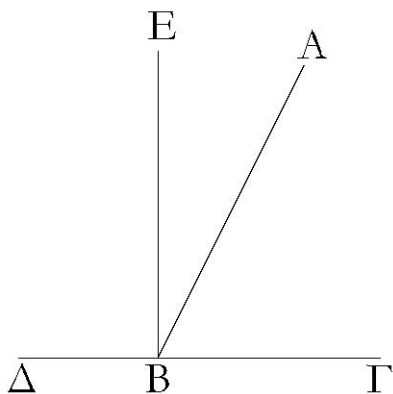
Dunque alla data retta infinita AB , dal punto dato Γ che non è su di essa, si è condotta la perpendicolare $\Gamma\Theta$, c. d. f.

26

angoli retti, o eguali a due retti.

Infatti una retta AB posta sulla $\Gamma\perp$ faccia gli angoli ΓBA , $AB\perp$.

Dico che gli angoli ΓBA , $AB\perp$ o son due retti, o sono eguali a due retti.



Poiché se ΓBA è eguale a $AB\perp$, essi sono due retti (T10). Ma se no, dal punto B si conduca la BE , ad angolo retto alla $\Gamma\perp$ (11); dunque ΓBE , $EB\perp$ son due retti. E poichè ΓBE è eguale ai

due ΓBA , ABE , si aggiunga $EB\perp$ comune. Dunque ΓBE , $EB\perp$ sono eguali ai tre ΓBA , ABE , $EB\perp$ (C2).

Ed ancora, poichè $\angle BA$ è eguale ai due $\angle BE$, EBA , si aggiunga $AB\Gamma$, comune. Dunque $\angle BA$, $AB\Gamma$ sono eguali ai tre $\angle BE$, EBA , $AB\Gamma$ (C2). Ma si è dimostrato che anche ΓBE , $EB\perp$ sono eguali agli stessi tre. Ma le cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro; dunque ΓBE , $EB\perp$, sono eguali a $\angle BA$, $AB\Gamma$.

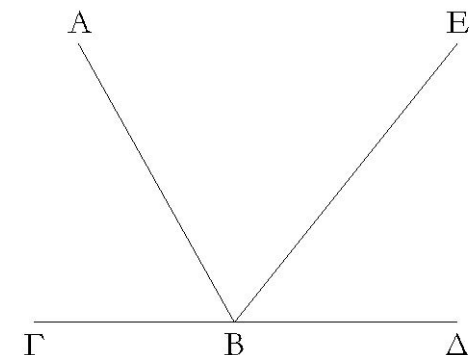
Ma ΓBE , $EB\perp$ son due retti, dunque $\angle BA$, $AB\Gamma$ sono eguali a due retti.

Dunque, *se una retta posta*, etc. c. d. d.

14. — *Se con una retta, e in un punto su di essa, due rette non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti, le due rette saranno per diritto tra loro.*

Con una retta AB , e nel punto B su di essa, le due rette BI , $B\perp$ che non son poste dalla stessa parte, facciano gli angoli adiacenti ABI , $AB\perp$ eguali a due retti.

Dico che $B\perp$ è per diritto alla ΓB .



Se infatti $B\perp$ non è per diritto alla ΓB , sia BE per diritto alla ΓB .

Poiché dunque la retta AB è posta sulla ΓBE , gli angoli ABI , ABE sono eguali a due retti (13). Ma anche ABI , $AB\perp$ sono eguali a due retti. Dunque ABI , ABE sono eguali a ABI , $AB\perp$ (C1). Si tolga ΓBA , comune. Dunque il resto ABE è eguale al resto $AB\perp$ (C3), il minore al maggiore, ciò che è impossibile.

Dunque BE non è per diritto alla ΓB . Similmente si dimostrerà che nessun'altra retta lo è, oltre la $B\perp$.

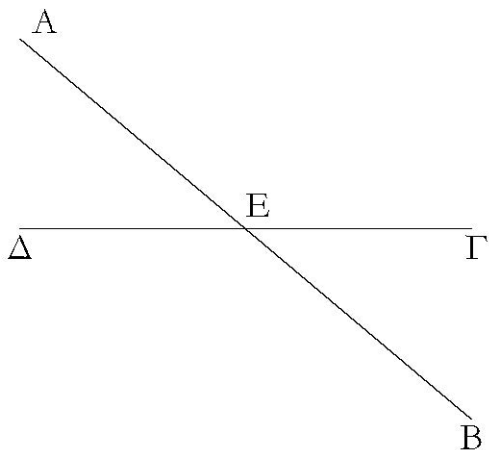
Adunque ΓB è per diritto alla $B\perp$.

Dunque, *se con una retta*, etc. c. d. d.

15. — *Se due rette si tagliano tra di loro, fanno gli angoli al vertice eguali tra loro.*

Infatti, le due rette AB , $\Gamma\Delta$ si tagliano tra loro nel punto E .

Dico che l'angolo AET è eguale all'angolo ΔEB , e che ΓEB è eguale a $AE\Delta$.



Poiché infatti la retta AE è posta sulla retta $\Delta\Gamma$, facendo gli angoli ΓEA , $AE\Delta$, i due angoli ΓEA , $AE\Delta$ sono eguali a due retti (13). Ed ancora, poiché la retta ΔE è posta sulla retta AB facendo gli an-

goli $AE\Delta$, ΔEB , anche gli angoli $AE\Delta$, ΔEB sono eguali a due retti. Dunque gli angoli ΓEA , $AE\Delta$ sono eguali agli angoli $AE\Delta$, ΔEB (C1). Si tolga $AE\Delta$ comune; allora il resto ΓEA è eguale al resto $BE\Delta$. Similmente si dimostrerà che anche ΓEB , ΔEA sono eguali.

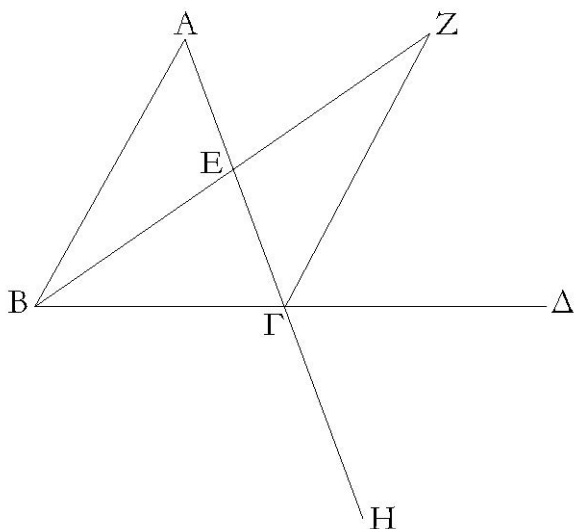
Dunque, *se due rette*, etc. c. d. d.

16. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti.*

Sia il triangolo $AB\Gamma$, e si prolunghi un lato $B\Gamma$ di esso fino in Δ .

Dico che l'angolo esterno $A\Gamma\Delta$ è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti ΓBA , $B\Gamma A$.

Si divida per metà la $A\Gamma$ in E (10), e condotta la BE , si prolunghi per diritto fino in Z , e si ponga EZ eguale alla BE , e si conduca la $Z\Gamma$, esi prolunghi la $A\Gamma$ fino in H .



Poiché dunque AE è eguale alla ET , e la BE alla EZ , le due AE , EB sono eguali alle due TE , EZ , ciascuna a ciascuna. E l'angolo AEB è

eguale all'angolo ZET ; sono infatti opposti al vertice (15). Dunque la base $Z\Gamma$ è eguale alla base AB , ed il triangolo ABE è eguale al triangolo ZET ed i restanti angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli sottesi da lati eguali (4).

Dunque BAE è eguale a ETZ . Ma $E\Gamma\Delta$ è maggiore di ETZ (C5), dunque $A\Gamma\Delta$ è maggiore di BAE .

Similmente, divisa per metà la BF si dimostrerà che BFH , o ciò che è lo stesso $AF\angle$, è maggiore di ABF .

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

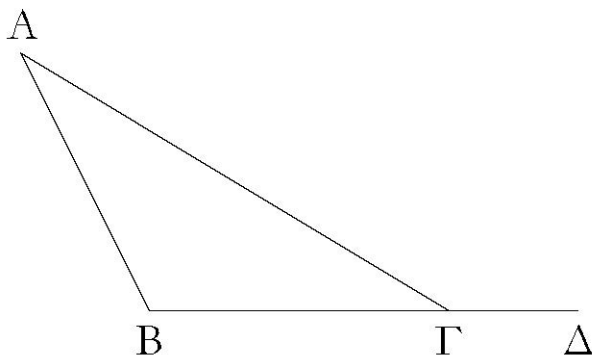
17. — *In ogni triangolo due angoli comunque presi, son minori di due retti.*²⁰

Sia il triangolo ABF .

Dico che due angoli del triangolo ABF , comunque presi, sono minori di due retti.

Si prolunghi infatti la BF in $\angle$.

²⁰ Si osservi che questa proposizione è inversa del postulato 5, del quale si farà uso soltanto dalla (29) in poi. Infatti il (P5) afferma che, se due rette, incontrate da un'altra, fanno gli angoli interni dalla stessa parte minori di due retti, esse s'incontrano. Questa (17), afferma invece, che se due rette s'incontrano, e sono incontrate da un'altra (formando così un triangolo), fanno con questa gli angoli interni dalla parte da cui s'incontrano (che son due angoli del triangolo), minori di due retti.



E poiché
nel trian-
golo $AB\Gamma$
l'angolo
 $A\Gamma\Delta$ è
esterno, è
maggiore
dell'interno

ed opposto $AB\Gamma$ (16).

Si aggiunga $A\Gamma B$, comune. Dunque gli angoli $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ son maggiori di $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ (C4). Ma $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ sono eguali a due retti (13).

Dunque $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ son minori di due retti.

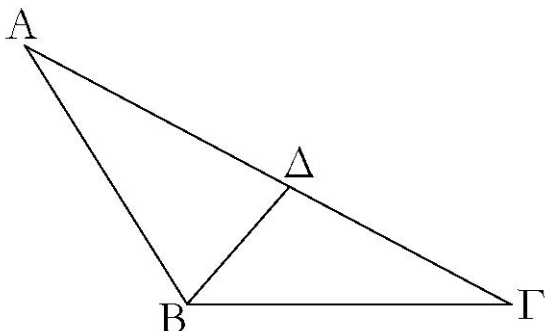
Similmente dimostreremo che anche $B\Gamma A$, $A\Gamma B$ son minori di due retti, e così pure $A\Gamma B$, $AB\Gamma$.

Adunque in ogni triangolo, etc., c. d. d.

18. — *In ogni triangolo, il maggior lato sottende il maggior angolo.*²¹

²¹ Da questa proposizione si ricava con una regola di logica pura la proposizione (6). Si ha infatti la proposizione: $a, b \in \text{Cls.}$
 $\supset: a \supset b. = \text{---} b \supset \text{---} a$ (G. PEANO, Aritmetica generale ed algebra elementare; Torino, Paravia 1902 p. 7). Ora dalla (18) si ricava:

--- (triangoli isosceli) $\supset \text{---}$ (triangoli aventi gli angoli alla base



Sia infatti il
triangolo $AB\Gamma$
avente il lato
 $A\Gamma$ maggiore di
 AB .

Dico che an-
che l'angolo
 $AB\Gamma$ è mag-

giore di $B\Gamma A$.

Poiché infatti $A\Gamma$ è maggiore di AB , si ponga $A\Delta$ eguale ad AB (2) e si congiunga $B\Delta$.

Poiché nel triangolo $B\Gamma\Delta$, l'angolo $A\Delta B$ è esterno, esso è maggiore dell'interno ed opposto $\angle\Gamma B$ (16); ed ancora l'angolo $A\Delta B$ è eguale a $AB\Delta$, poiché il lato AB è eguale ad $A\Delta$ (5); è dunque anche $AB\Delta$ maggiore di $A\Gamma B$. Dunque $AB\Gamma$ è ancor maggiore di $\angle\Gamma B$ (C5).

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

19. — *In ogni triangolo, il maggior angolo è sotteso dal maggior lato.*²²

eguali). Quindi: (triangoli aventi gli angoli alla base eguali) $\supset$ (triangoli isosceli), che è la (6).

²² AUGUSTUS DE MORGAN (*Formal logic*, 1847, p. 25) secondo

Sia $AB\Gamma$ il triangolo avente l'angolo $AB\Gamma$ maggiore dell'angolo $B\Gamma A$.

Dico che anche il lato $A\Gamma$ è maggiore del lato AB .

Se infatti non è, la $A\Gamma$ è eguale o minore della AB . Ma non è AB eguale ad $A\Gamma$ poiché allora sarebbe anche $AB\Gamma$ eguale a

un passo riferito da Heath (p. 284), ha osservato che le (6) e (19) si deducono contemporaneamente dalle (5) e (18), con pure operazioni di logica. Se infatti si hanno due terne di proposizioni p, q, r ed x, y, z , tali che di ogni terna, una ed una sola sia vera, cioè sia: $p = \neg q \neg r, \quad q = \neg r \neg p, \quad r = \neg p \neg q$, e così pure $x = \neg y \neg z$, etc. allora si ha:

$$x \supset p. \quad y \supset q. \quad x \supset r. \quad \supset. \quad p \supset x. \quad q \supset y. \quad r \supset z.$$

Se ora denotiamo con a, b due lati di un triangolo e con A, B gli angoli opposti; le due terne di proposizioni; $a=b, \quad a < b, \quad a > b$; $A=B, \quad A < B, \quad A > B$, soddisfanno alle condizioni sopra indicate; ed inoltre:

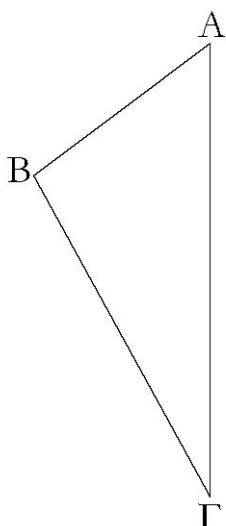
$$a=b. \quad \supset. \quad A=B \quad (5); \quad a < b. \quad \supset. \quad A < B \quad (18);$$

$$a > b. \quad \supset. \quad A > B \quad (18).$$

perciò anche:

$$A=B. \quad \supset. \quad a=b \quad (6); \quad A < B. \quad \supset. \quad a < b. \quad (19);$$

$$A > B. \quad \supset. \quad a > b \quad (19).$$



presi.²³

ATB (5). E nemmeno è AT minore di AB , poiché allora sarebbe ABT minore di ATB (18), il che non è. Dunque non è AT minore di AB . Ma si è dimostrato che non è neppure eguale, dunque AT è maggiore di AB .

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

20. — *In ogni triangolo, due lati sono maggiori del restante, comunque siano*

²³ Secondo uno scoliaste greco (EUCLIDE, ed HEIBERG, vol. V p. 156), gli Epicurei dicevano inutile questo teorema (20) osservando che era evidente anche ad un asino, e non aveva bisogno di nessuna dimostrazione.

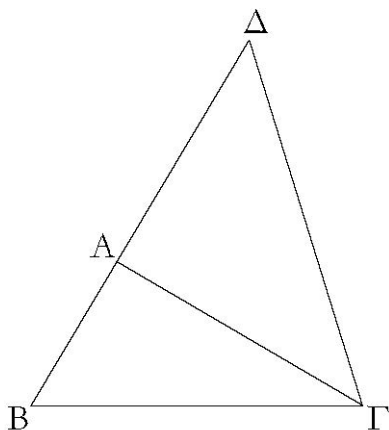
Archimede (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* lib. I.) comincia col postulato «La retta è la minima di tutte le linee contermini». (*Λαμβάνω δὲ ταῦτα· Τῶν τὰ αὐτὰ πέριχα ἔχουσῶν γραμμῶν ἐλάχιστην εἶναι τὴν εὐθείαν*).

La dimostrazione di Euclide, assai elegante, ha lo scopo di enunciare una condizione necessaria perchè tre rette formino un

Sia infatti il triangolo $AB\Gamma$.

Dico che due lati son maggiori del restante comunque siano presi, cioè $BA, A\Gamma$ maggiori di $B\Gamma$; $AB, B\Gamma$ maggiori di $A\Gamma$; $B\Gamma, \Gamma A$ maggiori di AB .

Si prolunghi infatti la BA verso il punto Δ , e si ponga $A\Delta$ eguale a ΓA , e si congiunga la $\Delta\Gamma$.



Poiché dunque ΔA è eguale ad $A\Gamma$ l'angolo $\Delta A\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma\Delta$ (5). Dunque $B\Gamma\Delta$ è maggiore di $\Delta A\Gamma$. E poiché il triangolo $A\Gamma B$ ha l'angolo $B\Gamma\Delta$ maggiore dell'angolo $B\Delta\Gamma$, ed al maggior angolo sottende il maggior lato (19), la ΔB

è dunque maggiore della $B\Gamma$. Ma ΔA è eguale a $A\Gamma$; dunque le $BA, A\Gamma$ son maggiori della $B\Gamma$. Similmente dimostreremo che $AB, B\Gamma$ son maggiori di $A\Gamma$, e che $B\Gamma, \Gamma A$ son maggiori di AB .

Dunque, in ogni triangolo, etc. c. d. d.

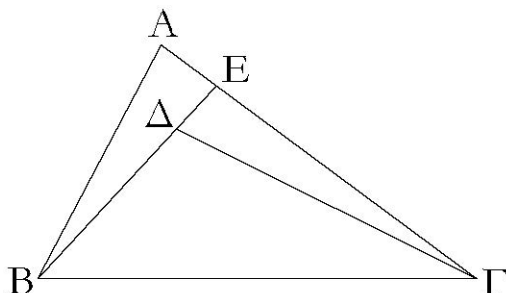
triangolo (22). Essa serve inoltre a mostrare che il numero degli assiomi da cui si possono dedurre le verità della geometria è piccolo.

21. — *Se in un triangolo, dagli estremi di un lato si congiungono due rette internamente, le due rette congiunte saranno minori dei due restanti lati del triangolo, e comprenderanno un angolo maggiore.*

Infatti, nel triangolo $AB\Gamma$ dagli estremi B, Γ di un lato $B\Gamma$, si congiungano due rette internamente $B\Delta, \Delta\Gamma$.

Dico che le $B\Delta, \Delta\Gamma$ sono minori dei due restanti lati del triangolo $BA, A\Gamma$ ma che comprendono un angolo $B\Delta\Gamma$ maggiore dell'angolo $B\Delta\Gamma$.

Si prolunghi infatti la $B\Delta$ in E . E poich  in ogni triangolo due



lati son maggiori del restante (20), i due lati AB, AE del triangolo ABE son maggiori di BE ; si aggiunga $E\Gamma$, comune; dunque $BA, A\Gamma$ son maggiori di

$BE, E\Gamma$ (C2). Ancora, i due lati $\Gamma E, E\Delta$ del triangolo $\Gamma E\Delta$ son maggiori di $\Gamma\Delta$; si aggiunga AB , comune; dunque $\Gamma E, EB$ son maggiori di $\Gamma\Delta, \Delta B$. Ma $BE, E\Gamma$ si erano dimostrate minori di $BA, A\Gamma$; dunque $BA, A\Gamma$ sono molto maggiori di $B\Delta, \Delta\Gamma$.

Ancora, poich  in ogni triangolo, l'angolo esterno   maggiore di un interno ed opposto (16), dunque nel triangolo $\Gamma\Delta E$ l'angolo esterno $B\Delta\Gamma$   maggiore di $\Gamma E\Delta$. E per la stessa ragione

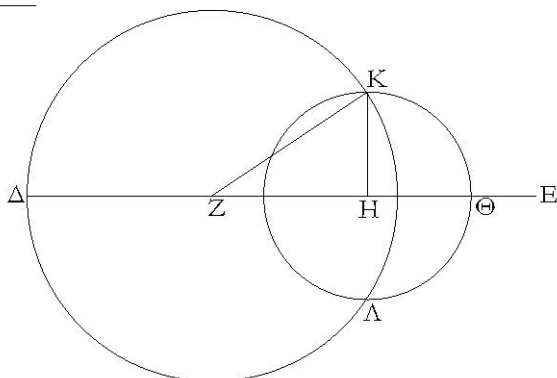
anche nel triangolo ABE l'angolo TEB è maggiore di BAI . Ma si è dimostrato che $B\perp I$ è maggiore di TEB . Dunque $B\perp I$ è molto maggiore di BAI .

Dunque, *se in un triangolo*, etc., c. d. d.

22. — *Con tre rette, che sono eguali a tre date, costruire un triangolo; due di esse devono naturalmente esser maggiori della restante, comunque si prendano* [20].²⁴

²⁴ Euclide non dimostra che i due cerchi si tagliano in K . Come nella (1), egli ammette come evidente che *se un circolo ha un punto esterno ad un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia*. Non è da escludersi che sotto questa o sotto altra forma, una tale proprietà del circolo si sia potuta trovare nella primitiva redazione dei postulati o delle definizioni.

A _____
 B _____
 Γ _____



Siano A, B, Γ le tre rette date, delle quali due son maggiori della restante, comunque prese, A, B maggiori di Γ ; A, Γ di B ; e B, Γ di A . Si deve dunque costruire un triangolo con tre rette eguali alle A, B, Γ .

Si prenda una retta ΔE terminata in Δ e infinita verso E e si ponga ΔZ eguale ad A , ZH eguale a B , ed $H\Theta$ eguale a Γ . Con centro Z e con distanza $Z\Delta$ si descriva il circolo $\Delta K\Lambda$; ed ancora con centro H e con distanza $H\Theta$ si descriva il circolo $K\Lambda\Theta$, e si conducano le KZ, KH .

Dico che con tre rette eguali alle A, B, Γ si è costruito il triangolo KZH .

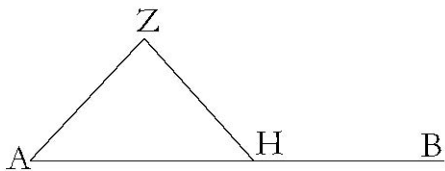
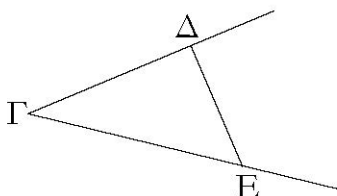
Poiché infatti il punto Z è centro del circolo $\Delta K\Lambda$, la $Z\Delta$ è eguale alla ZK . Ma la $Z\Delta$ è eguale ad A ; dunque anche la ZK è eguale ad A (C1). Ancora, poiché il punto H è centro del circolo $\Lambda K\Theta$, la $H\Theta$ è eguale alla HK . Ma la $H\Theta$ è eguale a Γ ; dunque

anche la KH è eguale a Γ . Ma anche la ZH è eguale a B . Dunque le tre rette KZ , ZH , HK sono eguali alle tre A , B , Γ .

Dunque con le tre rette KZ , ZH , HK , che sono eguali alle tre rette date A , B , Γ , si è costruito il triangolo KZH ; c. d. f.

23. — *Su una retta data ed in un punto dato in essa, costruire un angolo rettilineo eguale ad un angolo rettilineo dato.*

Sia AB la retta data, ed A il punto dato in essa, e sia $\angle IFE$ l'angolo rettilineo dato.



Si deve dunque sulla retta data AB e nel punto dato in essa A , costruire un angolo rettilineo eguale a $\angle IFE$.

Poiché le due $\angle I, \angle E$ sono eguali alle due $\angle A, \angle H$ ciascuna a ciascuna, e la base $\angle E$ è eguale alla base $\angle H$, l'angolo $\angle I$ è

eguale a $\angle ZAH$ (8).

Dunque su la retta data AB e nel punto dato in essa A , si è costruito l'angolo rettilineo ZAH , eguale all'angolo rettilineo dato $\angle IFE$; c. d. f.

24. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, ma hanno un angolo maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette eguali, avranno anche la base maggiore della base.*²⁵

²⁵ L'enunciato di questo teorema (e così pure quello del teorema successivo), è poco chiaro, quando si traduce alla lettera. Una traduzione libera potrebbe essere questa:

24. *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ma l'angolo compreso dai lati eguali in uno dei due triangoli, è maggiore dell'angolo corrispondente dell'altro triangolo, anche la base del primo triangolo sarà maggiore della base dell'altro.*

EUCLIDE svolge soltanto un caso, quello in cui Z cade al di fuori del triangolo $\triangle EHZ$. Gli altri due casi (in cui Z cade sulla HE , ovvero dentro il triangolo $\triangle EHZ$) hanno una dimostrazione analoga, ma alquanto più semplice (svolta da Proclo). SIMSON ha osservato che se si chiama $\angle E$ il più corto dei due lati $\angle E$, $\angle Z$, allora necessariamente Z cade fuori del triangolo $\triangle EHZ$ e si ha il solo caso svolto da Euclide. Occorre però dimostrarlo. Si può far così. Sia $\angle H \geq \angle E$. Si prolunghi infatti se occorre $\angle Z$, fino

Siano i due triangoli $AB\Gamma$, $\triangle EZ$ aventi i due lati AB , $A\Gamma$ eguali ai due lati $\triangle E$, $\triangle Z$ ciascuno a ciascuno, AB eguale a $\triangle E$, ed $A\Gamma$ a $\triangle Z$; e l'angolo in A maggiore dell'angolo in $\triangle$.

Dico che anche la base $B\Gamma$ è maggiore della base EZ .

Poiché infatti l'angolo $B\triangle\Gamma$ è maggiore dell'angolo $E\triangle Z$, sulla retta $\triangle E$ e nel punto in essa $\triangle$, si costruisca l'angolo $E\triangle H$ eguale all'angolo $B\triangle\Gamma$ e si ponga $\triangle H$ eguale a ciascuna delle due $A\Gamma$, $\triangle Z$, e si congiungano le EH , ZH .

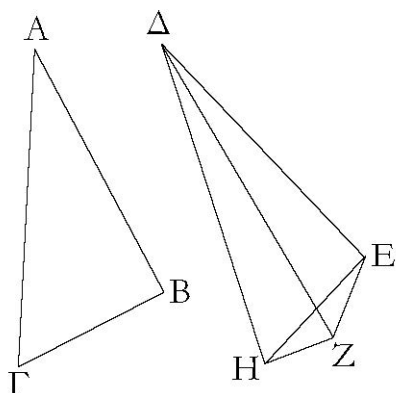
ad incontrare EH in K .

allora $\triangle KH > \triangle EK$ (16)

$\triangle EK \geq \triangle HK$ (18)

quindi $\triangle KH > \triangle HK$ quindi $\triangle H > \triangle K$ (19)

e poichè $\triangle Z = \triangle H$, $\triangle K < \triangle Z$, quindi Z cade fuori di $\triangle EK$ c. d. d.



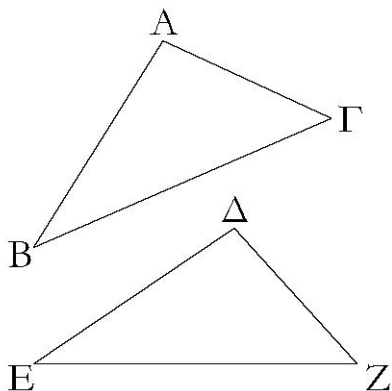
Poiché dunque AB è eguale a ΔE ed $A\Gamma$ a ΔH , le due BA , $A\Gamma$ sono eguali alle due $E\Delta$, ΔH ciascuna a ciascuna, e l'angolo $BA\Gamma$ è eguale all'angolo $E\Delta H$. Dunque la base $B\Gamma$ è eguale alla base EH (4). Ed ancora, poichè $\angle Z$ è eguale a $\angle H$, l'angolo $\angle HZ$ è eguale all'angolo $\angle ZH$ (5).

Dunque $\angle ZH$ è maggiore di $\angle HZ$ (C5). Dunque EZH è molto maggiore di $\angle HZ$ (C5). E poichè il triangolo EZH ha l'angolo EZH maggiore dell'angolo $\angle HZ$, e al maggior angolo sottende il maggior lato (19), è dunque il lato EH maggiore di EZ . Ma EH è eguale a $B\Gamma$; dunque $B\Gamma$ è maggiore di EZ .

Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

25. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base maggiore della base, anche un angolo, sarà maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette eguali.*

Siano due triangoli $AB\Gamma$, $\Delta EΖ$, aventi i due lati AB , $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE , $\Delta Ζ$ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE ed $A\Gamma$ eguale a $\Delta Ζ$; e la base $B\Gamma$ sia maggiore della base $EΖ$.



Dico che anche l'angolo $BA\Gamma$ è maggiore dell'angolo $E\Delta Z$.

Se infatti non è [maggiore], o è eguale o minore ad esso. Ma non è $BA\Gamma$ eguale a $E\Delta Z$, poiché allora anche la base $B\Gamma$ sarebbe eguale alla base EZ

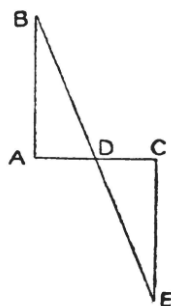
(4). Ma non è. Dunque l'angolo $BA\Gamma$ non è eguale a $E\Delta Z$. E nemmeno è $BA\Gamma$ minore di $E\Delta Z$. Poiché allora anche la base $B\Gamma$ sarebbe minore della base EZ (24). Ma non è. Dunque l'angolo $BA\Gamma$ non è minore di $E\Delta Z$. Ma si è mostrato che non è nemmeno eguale. Dunque $BA\Gamma$ è maggiore di $E\Delta Z$.

Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

26. — *Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, o quello tra gli angoli eguali, o uno di quelli sottendenti gli angoli eguali, avranno anche eguali i restanti lati ai restanti lati [ciascuno a ciascuno], ed il restante angolo al restante angolo.*²⁶

²⁶ Questa proposizione, come pure la (15) sono attribuite a TALETE, da PROCLO. Secondo la ricostruzione di TANNERY, TALETE il quale secondo PROCLO «avrebbe, per mezzo di questo

Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ aventi i due angoli $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ eguali ai due ΔEZ , $EZ\Delta$ ciascuno a ciascuno, $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ , e $B\Gamma A$ a $EZ\Delta$. Ed abbiano un lato eguale ad un lato, e dapprima quello compreso tra gli angoli eguali, $B\Gamma$ eguale a EZ .

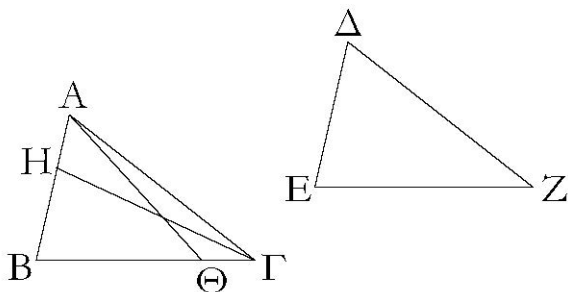


Dico che avranno anche i restanti lati eguali ciascuno a ciascuno, AB a ΔE , e $A\Gamma$ a ΔZ ; e il restante angolo $B\Delta\Gamma$ eguale al restante angolo $E\Delta Z$.

Se infatti AB non è eguale a ΔE , uno di essi è maggiore. Sia maggiore AB e si ponga BH eguale a ΔE , e si congiunga la HT .

teorema, trovato il modo di misurare la distanza di una nave in mare, dalla riva», avrebbe fatto così: Fissati sulla spiaggia due punti A, C il loro punto medio D e le due direzioni AB, CE perpendicolari alla AC, quando in A si osservi la nave B che fa l'angolo BAC retto, e da D si osserva che BDE sono in linea retta, la distanza CE che si può poi misurare sul suolo, è uguale alla AB, perché per la (15) $ADB=CDE$, e per la (26) $ABD=CED$, quindi $AB=CE$.

Poiché dunque BH è eguale a ΔE , e $B\Gamma$ a EZ , le due BH , $B\Gamma$ sono eguali alle due ΔE , EZ ciascuna a ciascuna; e l'angolo HBF



è eguale all'angolo ΔEZ . Dunque la base $H\Gamma$ è eguale alla base ΔZ , e il triangolo HBF è

eguale al triangolo ΔEZ , ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali (4). Dunque l'angolo $H\Gamma B$ sarà eguale all'angolo ΔZE . Ma ΔZE si è supposto eguale a $B\Gamma A$, dunque $B\Gamma H$ è eguale a $B\Gamma A$ (C1), il minore al maggiore, il che è impossibile (C5). Dunque AB non è diseguale a ΔE ; dunque è eguale. Ma $B\Gamma$ è eguale ad EZ . Dunque le due AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due ΔE , EZ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo ΔEZ . Dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base ΔZ , ed il restante angolo $B A \Gamma$ è eguale al restante angolo $E \Delta Z$ (4).

Siano ora invece eguali i lati sottendenti angoli eguali, come AB a ΔE . Dico che i restanti lati saranno eguali ai restanti lati $A\Gamma$ a ΔZ , e $B\Gamma$ ad EZ , e che anche il restante angolo $B A \Gamma$ è eguale al restante angolo $E \Delta Z$.

Se infatti $B\Gamma$ non è eguale ad EZ , uno di essi è maggiore. Sia

maggiore, se è possibile, BF , e si ponga $B\Theta$ eguale ad EZ , e si congiunga la $A\Theta$.

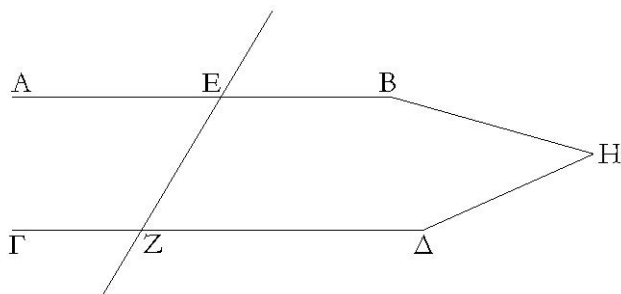
E poiché $B\Theta$ è eguale ad EZ , e AB a $\angle E$, le due AB , $B\Theta$ sono eguali alle due $\angle E$, EZ , ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base $A\Theta$ è eguale alla base AZ , ed il triangolo $AB\Theta$ è eguale al triangolo $\angle EZ$, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo $B\Theta A$ è eguale all'angolo $EZ\angle$. Ma $EZ\angle$ è eguale a $B\Gamma A$. Dunque l'angolo esterno $B\Theta A$ del triangolo $A\Theta\Gamma$ è eguale all'interno ed opposto $B\Gamma A$; il che è impossibile (16). Dunque BF non è diseguale a EZ ; dunque è eguale. Dunque le due AB , BF sono eguali alle due $\angle E$, EZ , ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base AF è eguale alla base AZ , e il triangolo ABF è eguale al triangolo $\angle EZ$, ed il restante angolo BAF è eguale al restante angolo $E\angle Z$.

Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

27. — *Se una retta cadendo su due rette fa gli angoli alterni eguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro.*²⁷

²⁷ 27. AUGUSTUS DE MORGAN ha osservato (*Companion to the almanac for 1849*, p. 8) che la (27) è una forma diversa della (16). Si passa dall'una all'altra con la regola di logica: $a, b \text{ e } \text{Cls. } \supset: a \supset b \text{ .} \equiv \text{ — } b \supset \text{ — } a$ (cfr. nota alla [18]).

Infatti la retta EZ cadendo sulle due rette $AB, \Gamma\Delta$ formi gli angoli alterni $AEZ, EZ\Delta$ eguali tra loro. Dico che AB è parallela a $\Gamma\Delta$.



Se infatti non è, prolungate le $AB, \Gamma\Delta$ si incontreranno dalla parte B, Δ ovvero dalla parte A, Γ . Si prolunghino e si incontrino dalla parte B, Δ in H . L'angolo esterno AEZ del triangolo HEZ

Se con a si intende la classe delle coppie di rette che fanno un triangolo con una trasversale, e con b la classe delle coppie di rette che fanno con una trasversale i due angoli alterni (cioè interno ed esterno) non eguali tra loro, allora la (16) ha la forma $a \supset b$, e la (27) la forma: $\neg b \supset \neg a$. Il ragionamento di Euclide è pure, in fondo lo stesso.

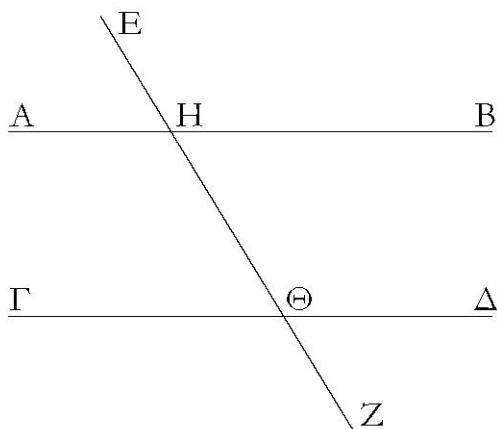
Questa nuova forma data da Euclide alla (16) ha lo scopo di collegare le proposizioni seguenti (27)–(34) che trattano delle proprietà delle parallele, con quelle che precedono le quali trattavano delle proprietà dei triangoli.

è eguale all'interno ed opposto EZH , il che è impossibile (16). Dunque le AB , $\Gamma\Delta$ prolungate dalla parte B , Δ non si incontreranno. Allo stesso modo si dimostrerà che nemmeno si incontrano dalla parte A , Γ . Ma se due rette non s'incontrano da nessuna delle due parti son parallele (T23). Dunque AB è parallela a $\Gamma\Delta$.

Dunque; *se una retta cadendo*, etc. c. d. d.

28. *Se una retta cadendo su due rette fa l'angolo esterno eguale all'interno ed opposto dalla stessa parte, ovvero i due interni dalla stessa parte eguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro.*

Infatti, la retta EZ cadendo sulle due rette AB , $\Gamma\Delta$ faccia l'angolo esterno EHB eguale all'interno ed opposto $H\Theta\Delta$, ovvero gli angoli interni dalla stessa parte $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ eguali a due retti. Dico che la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$.



Poiché infatti EHB è eguale a $H\Theta\Delta$, e poiché EHB è eguale ad $AH\Theta$ (15), anche $AH\Theta$ è eguale a $H\Theta\Delta$ (C1), e sono alterni. Quindi AB è

parallela a $\Gamma\Delta$ (27).

Ancora, poiché $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ sono eguali a due retti, e poiché $AH\Theta$, $BH\Theta$ sono anche eguali a due retti, (13), saranno anche $AH\Theta$, $BH\Theta$ eguali a $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C1). Si tolga $BH\Theta$ comune. Il resto $AH\Theta$ è allora eguale al resto $H\Theta\Delta$ (C3), e sono alterni, quindi la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$ (27).

Dunque *se una retta cadendo*, etc. c. d. d.

29. — *Una retta che cade su due rette parallele fa gli angoli alterni eguali tra loro, l'angolo esterno eguale all'interno ed opposto, e gli angoli interni dalla stessa parte eguali a due retti.*²⁸

²⁸ Come si è già osservato, questa prop. (29) è la prima in cui si adoperi il postulato (P5).

A chi ben consideri l'opera di Euclide, la formulazione del (P5) appare semplice ed elegante (cfr. la nota alla [17]). Per Euclide, due rette tagliate da una terza appaiono come una figura geometrica analoga ad un triangolo (cfr. la nota a [T22], pag. 9).

I geometri di ogni epoca si preoccuparono, di sostituire al (P5) qualche altro, il quale, assieme alle (1)–(28) permettesse di dimostrare la (29) e le seguenti.

Ecco alcune delle proposizioni più notevoli che sono state proposte per sostituire il (P5).

1. *Due linee rette che si incontrano, non possono essere parallele ad una stessa retta* (PROCLO), (È equivalente alla [30] di Euclide).

2. *Esiste un triangolo nel quale la somma degli angoli è eguale a due retti* (LEGENDRE, Mém. de l'Acad. des Sc. XII, p. 367: *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*).

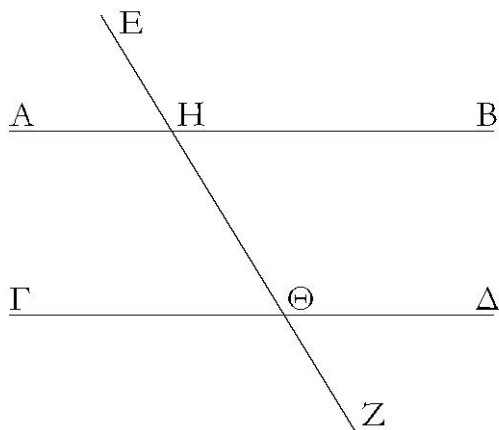
3. *Esistono due triangoli diseguali, aventi gli angoli eguali*. (SACHERI, nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) ovvero nella versione italiana, *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*, di G. BOCCARDINI, Milano, Hoepli, 1904).

4. *È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualsivoglia area data* (GAUSS, lettera a W. BOLYAI, 1799).

Una interessante esposizione di questi ed altri metodi si trova nella versione di Euclide di HEATH, vol. I pagine 202-220. Cfr. anche la nota alla successiva (32), e BONOLA, *La Geometria non Euclidea*, Bologna, Zanichelli, 1903.

Infatti sulle rette parallele $AB, \Gamma\Delta$ cada la retta EZ . Dico che essa fa gli angoli alterni $AH\Theta$, $H\Theta\Delta$ eguali, e l'angolo esterno EHB eguale all'interno ed opposto $H\Theta\Delta$, e gli interni dalla stessa parte $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ eguali a due retti.

Infatti se $AH\Theta$ non è eguale a $H\Theta\Delta$, uno di essi è maggiore. Sia maggiore $AH\Theta$. Si aggiunga $BH\Theta$ comune. Allora $AH\Theta$, $BH\Theta$ son maggiori di $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C2). Ma $AH\Theta$, $BH\Theta$ sono eguali a due retti (13), dunque $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ son minori di due retti. Ma due rette che fanno gli angoli interni minori di due retti, prolungate all'infinito, si incontrano (P5). Dunque $AB, \Gamma\Delta$ prolungate all'infinito, si incontreranno; ma non si incontrano perché si son supposte parallele: Non è dunque $AH\Theta$ diseguale a $H\Theta\Delta$. È dunque eguale.



Ma anche $AH\Theta$ è eguale a EHB (15). Dunque EHB è eguale a $H\Theta\Delta$ (C1). Si aggiunga $BH\Theta$ comune. Dunque EHB , $BH\Theta$ sono eguali a $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C 2). Ma

EHB , $BH\Theta$ sono eguali a due retti (13). Dunque anche $BH\Theta$, $H\Theta\perp$ sono eguali a due retti.

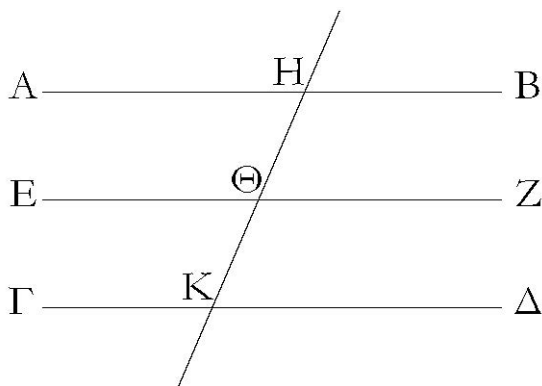
Dunque *una retta che cade su due rette parallele*, etc. c. d. d.

30. — *Le parallele ad una stessa retta sono anche parallele tra loro.*²⁹

²⁹ Euclide non spiega come si possa costruire la HK , la quale incontri le altre tre rette.

La proposizione sembra alterata, o monca, il che può anche sospettarsi dal fatto che essa è priva della solita conclusione. Forse Euclide deduceva dal (P5) che la $H\Theta$ incontrando la EZ doveva anche incontrare la parallela $\Gamma\perp$? Ovvero preso a caso H su AB , e K su $\Gamma\perp$ osservava che essendo EZ interna alle due AB , $\Gamma\perp$, la HK doveva necessariamente tagliarla in Θ ?

A. DE MORGAN ha osservato (*Compan. to the almanac for 1849*, p. 8 che la (30) è logicamente equivalente all'altra: *Due rette che si tagliano non possono esser parallele entrambe ad un'altra retta.*



Sia ognuna delle AB , $\Gamma\Delta$ parallela alla EZ ; dico che la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$.

Infatti, le incontri la retta HK .

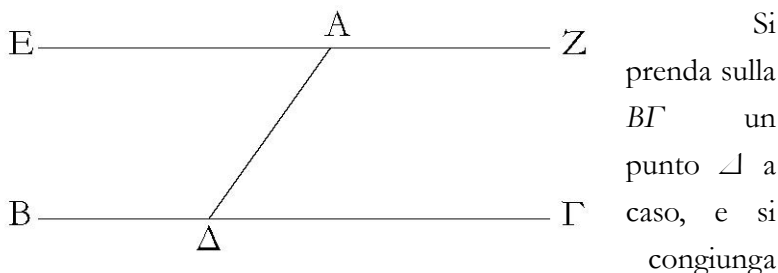
Poiché HK incontra le rette parallele AB , EZ l'angolo AHK è eguale all'angolo $H\Theta Z$ (29). E poiché ancora HK incontra le parallele EZ , $\Gamma\Delta$, l'angolo $H\Theta Z$ è eguale all'angolo HKA (29). Ma si è dimostrato che AHK è eguale ad $H\Theta\Delta$; dunque anche AHK è eguale a HKA (C1), e sono alterni.

Dunque AB è parallela a $\Gamma\Delta$ (27). c. d. d.

31. *Per un punto dato condurre una linea retta parallela ad una retta data.*³⁰

³⁰ PROCLO aveva osservato che Euclide pone il problema (31) soltanto dopo aver dimostrato la (30), dalla quale è facile concludere che da un punto ad una retta si può condurre una sola parallela.

Sia A il punto dato, e sia BF la retta data. Si deve dunque per il punto A condurre una linea retta parallela alla retta BF .



la ΔA ; e sulla retta ΔA e sul punto A di essa si costruisca l'angolo ΔAE eguale all'angolo $\Delta \Delta \Gamma$ (23), e si prolunghi per diritto alla EA , la retta AZ .

E poiché la retta $A\Delta$ cadendo sulle due rette BF , EZ fa gli angoli alterni $EA\Delta$, $\Delta \Delta \Gamma$ eguali tra loro, dunque la EAZ è parallela alla BF (27).

Dunque dal punto dato A , è stata condotta la linea retta EAZ parallela alla retta data BF . c. d. f.

32. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è eguale ai due interni ed opposti, ed i tre angoli interni al triangolo sono eguali a due retti.*³¹

³¹ Questa proposizione è spesso citata da ARISTOTELE, come esempio di una verità accettata da tutti (*Anal. Post.* I, 24, 85 C 5; ibid. 85 C 11; *Metaph.* 1051 a 24). Questo passo della *Metafisica* di

ARISTOTELE, come è stato osservato da HEIBERG, si riferisce alla dimostrazione qui data da EUCLIDE; quindi non solo la proposizione, ma anche la dimostrazione sono anteriori ad EUCLIDE.

I Pitagorici, secondo quanto riferisce PROCLO (p. 379) dimostravano questo teorema conducendo invece dal vertice A una parallela alla base BF , ed osservando che gli altri due angoli così formati attorno al vertice sono eguali agli altri due angoli del triangolo perché alterni ed interni etc.

Come TARTAGLIA osserva nel suo commento a questa proposizione, è facile estenderla ai poligoni semplici, o stellati. Così ad es. *in un pentagono stellato la somma dei cinque angoli A, B, C, D, E è eguale a due angoli retti*. Infatti l'angolo AGF , esterno del triangolo EGC , è eguale ai due interni ed opposti E, C ; e l'angolo AFG esterno del triangolo DBF è eguale ai due interni ed opposti B, D , dunque, etc.

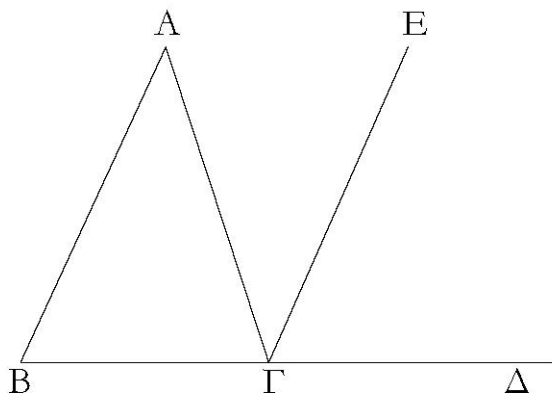
Questo pentagono stellato, o *pentagramma* era il segno di riconoscimento dei Pitagorici.

La (32) dipende dalla (29), la quale a sua volta dipende dal postulato (P5). È stato dimostrato nel secolo XIX che se non si ammette la (P5), la (32) non è necessariamente vera, potendosi ai termini *retta, angolo, piano, triangolo*,... dare un senso tale che siano verificate le proposiz. (1)-(28), e non siano invece verificati né la (P5), né la (32). (BELTRAMI, *Giornale di Matematiche*, Napoli, 1868).

Sia il triangolo $AB\Gamma$ e si prolunghi un suo lato $B\Gamma$ in Δ . Dico che l'angolo esterno $A\Gamma\Delta$ è eguale ai due interni ed opposti ΓAB , $AB\Gamma$, e che i tre angoli interni del triangolo $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB sono eguali a due retti.

Si conduca infatti dal punto Γ alla AB , la retta parallela ΓE .

E poiché AB è parallela a ΓE , e su di esse cade la $A\Gamma$, gli angoli alterni BAG , $A\Gamma E$ sono eguali tra loro (29). Ancora, poiché AB è parallela a ΓE , e su di esse cade la $B\Delta$, l'angolo esterno $E\Gamma\Delta$ è eguale all'angolo interno ed opposto $AB\Gamma$ (29). Ma si era

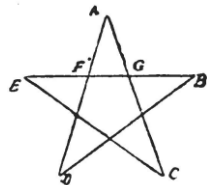


già dimo-
strato che
 $A\Gamma E$ è
eguale a
 BAG . Dun-
que tutto
l'angolo
 $A\Gamma\Delta$ è
eguale ai

due interni ed opposti BAG , $AB\Gamma$ (C2).

Senza far uso della (P5), ma soltanto delle nozioni precedenti, si giunge appena a dimostrare la (16) e la (17), dalle quali si deduce soltanto che la (32) è *possibile*.

Si aggiunga l'angolo comune $\angle A\Gamma B$; allora i due angoli $\angle A\Gamma\Delta$, $\angle A\Gamma B$ sono eguali ai tre $\angle AB\Gamma$, $\angle B\Gamma A$, $\angle \Gamma AB$ (C2). Ma i due angoli $\angle A\Gamma\Delta$, $\angle A\Gamma B$ sono eguali a due retti (13). Dunque anche i tre angoli $\angle A\Gamma B$, $\angle \Gamma B A$, $\angle \Gamma A B$ sono eguali a due retti (C1).

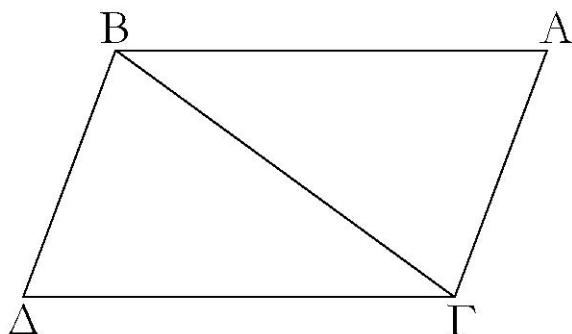


Dunque *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

33. — *Le rette congiungenti dalla stessa parte rette eguali e parallele sono anch'esse eguali e parallele.*³²

Siano le AB , $\Gamma\Delta$ eguali e parallele, e le congiungano dalla stessa parte le AI , $B\Delta$. Dico che anche AI , $B\Delta$ sono eguali e parallele.

³² Questa proposizione, come Proclo ha osservato, collega la teoria delle parallele con quella dei parallelogrammi. Essa definisce implicitamente che cosa sia un *parallelogrammo*. A partire dalla proposizione successiva, Euclide adopera questa nuova parola senza altri schiarimenti.



Si conduca la $B\Gamma$.

E poiché la AB è parallela alla ΓA , e la $B\Gamma$ le incontra, gli

angoli alterni $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ sono eguali tra loro (29). E poiché AB è eguale a $\Gamma\Delta$, e la $B\Gamma$ è comune, le due AB , $B\Gamma$ sono eguali alle due $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$; e l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$; dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base $B\Delta$, ed il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $B\Gamma\Delta$, ed i restanti angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo $A\Gamma B$ è eguale all'angolo $\Gamma B\Delta$ (4). E poiché la retta $B\Gamma$ cadendo sulle due rette $A\Gamma$, $B\Delta$ fa gli angoli alterni eguali tra loro, è dunque la $A\Gamma$ parallela alla $B\Delta$ (27). Ma si è già dimostrato che le è anche eguale.

Dunque, *le rette congiungenti*, etc. c. d. d.

34. — *I lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo son*

eguali tra loro, e il diametro lo divide per metà.³³

³³ Euclide avrebbe potuto abbreviare la seconda parte di questa dimostrazione osservando che la (26) citata in principio già permette di concludere l'eguaglianza dei due triangoli ABI , $BI\perp$. Si osservi però che questa conseguenza si trae dalla dimostrazione, ma non dal solo enunciato della (26). Perciò Euclide forse ha preferito ricorrere alla (4).

Il matematico arabo AN-NAIRĪZĪ, adoperando le (33) e (34), ha dato una elegante costruzione della trisezione di una retta (*Anaritii in decem libros priores elementor. Euclidis comm. ex interpretatione Gherardi cremonensis*, ed. Curtze, Leipzig, Teubner, 1899, p. 74). Egli conduce da parti opposte della retta data AB da trisecare, dagli estremi AB , due perpendicolari eguali tra loro AC , BD . Bisecata ognuna di queste nei punti E , F , congiunge ED , CF . I due punti d'intersezione G , H di queste congiungenti colla AB , risolvono il problema.

La dimostrazione è facile. Si conduce perciò da H la perpendicolare, etc.

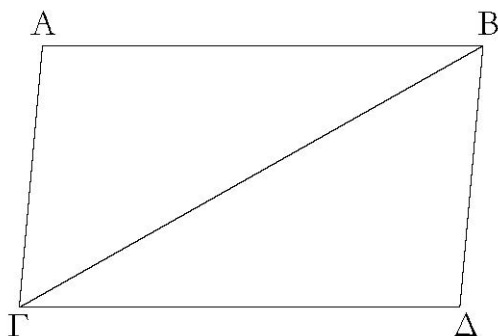
Con una costruzione analoga si può dividere una retta in quante si vogliano parti eguali.

E però più semplice adoperare per la soluzione di questo problema la teoria delle proporzioni. Così fa Euclide nella prop. (9) del libro sesto. Cfr. la nota alla (10).

Sia lo spazio parallelogrammo $AI\Delta B$, ed il suo diametro BI . Dico che i lati e gli angoli opposti del parallelogramma $AI\Delta B$ sono eguali tra loro, e che il diametro lo divide per metà.

Poiché infatti la AB è parallela a $I\Delta$, e la retta BI cade su di esse, gli angoli alterni ABI , $BI\Delta$ sono eguali tra loro (29). E ancora, poiché AI è parallela a $B\Delta$, e BI cade su di esse, gli angoli alterni AIB , $IB\Delta$ sono eguali tra loro (29).

Dunque i due triangoli ABI , $BI\Delta$ hanno i due angoli ABI , BIA eguali ai due $BI\Delta$, $IB\Delta$ ciascuno a ciascuno, ed un lato



eguale ad un lato, quello tra gli angoli eguali, la BI comune. Perciò anche i restanti lati saranno eguali ai restanti lati, ciascuno a ciascuno,

ed il restante angolo, al restante angolo (26). Dunque la AB è eguale alla $I\Delta$, e la AI a $B\Delta$, ed ancora l'angolo BAI eguale a $I\Delta B$. Ma poiché l'angolo ABI è eguale a $BI\Delta$ e $IB\Delta$ è eguale a AIB , è dunque tutto $AB\Delta$ eguale a tutto $AI\Delta$ (C2). Ma già si era dimostrato che BAI è eguale a $I\Delta B$.

Dunque i lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo sono eguali tra loro.

Dico poi, che un diametro lo divide per metà. Poiché infatti AB è eguale a $\Gamma\Delta$, e BF è comune, le due AB , BF sono eguali alle due $\Gamma\Delta$, BF ciascuna a ciascuna, e l'angolo ABF è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$ (29). Dunque il triangolo ABF è eguale al triangolo $B\Gamma\Delta$ (4).

Dunque il diametro BF divide per metà il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$, c. d. d.

35. — *I parallelogrammi sulla stessa base e nelle stesse parallele, sono eguali tra loro.*³⁴

³⁴ Euclide sviluppa soltanto il caso più complicato. Ma il punto E potrebbe cadere su Δ o nella $A\Delta$.

Le dimostrazioni, in questi due casi, già svolte da PROCLO, si ottengono da quella data da Euclide, con alcune lievi semplificazioni.

Si noti che in questa proposizione (35) compare per la prima volta la parola *eguale* usata in un nuovo senso.

Volendo evitare l'ambiguità, gli scrittori moderni hanno proposto, e sembra questa la via preferibile, di introdurre un nuovo concetto astratto, il concetto di *area*, dicendo cioè che i due parallelogrammi *hanno eguale area*, o *sono eguali in area*.

LEGENDRE invece nella sua *Géométrie* (quatrième édition, Paris, 1802, note I p. 274) propone di chiamar *equivalenti* i due parallelogrammi. Questa denominazione spesso seguita in trattati moderni; ha l'inconveniente di moltiplicare eccessivamente le proposizioni. Bisogna in tal caso ripetere per enti *equivalenti* le nozioni comuni (C1), (C2), (C3). Ed anche cessa in qualche caso la validità della (C2), poiché a triangoli eguali aggiungendo triangoli eguali si possono ottenere parallelogrammi non più *eguali* ma appena *equivalenti*.

Si noti infine che nella dimostrazione della (35) non occorre l'uso della (C3) quando E cade tra A e $\perp$, ma basta la sola (C2).

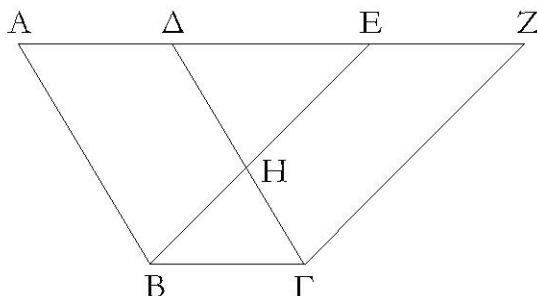
È stato dimostrato che si può sempre ricondursi a questo caso, ed essere sufficiente l'uso della (C2) (la quale afferma che aggiungendo aree eguali ad aree eguali si hanno aree eguali), *purché si introduca* un postulato (formulato da ARCHIMEDE, *Quadratura della parabola* II ed. Heiberg vol. 2 p. 265), di cui Euclide non fa uso, il quale dice in sostanza che date due aree diseguali si può trovare un numero n tale, che n volte la minore superi la maggiore.

Si è costruita così una teoria dell'*equivalenza*, od *egualianza addittiva* delle aree delle figure piane, per opera di W. BOLYAI, DUHAMEL, DE ZOLT,... Essa è adoperata in vari trattati scolastici italiani moderni.

Si veda per una esposizione completa, l'articolo di U.

Siano i parallelogrammi $AB\Gamma\Delta$, $EB\Gamma Z$ su la stessa base e nelle stesse parallele AZ , $B\Gamma$.

Dico che $AB\Gamma\Delta$ è uguale al parallelogrammo $EB\Gamma\Delta$. Poiché infatti $AB\Gamma\Delta$ è un parallelogrammo, $A\Delta$ è uguale a $B\Gamma$ (34). E per la stessa ragione anche EZ è uguale a $B\Gamma$. Quindi anche $A\Delta$ è uguale a EZ (C1). Ed ancora la $\angle E$ è comune; dunque tutta la



AE è uguale a tutta la ΔZ (C2).

Ma ancora, AB è uguale a $\Delta\Gamma$ (34); dunque le due EA , AB sono eguali alle

due $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $Z\Delta\Gamma$ è uguale all'angolo EAB , l'esterno all'interno (29). Dunque la base EB è uguale alla base ΓZ , ed il triangolo EAB sarà anche uguale al triangolo

AMALDI, *Sulla teoria dell'equivalenza*, nelle *Questioni riguardanti la Geometria Elementare*, Bologna, II ed. 1910.

Questa teoria è senza dubbio interessante ed elegante. Essa però sembra assai più artificiosa di quella Euclidea, non essendovi ragione per non introdurre nell'insegnamento fin da principio anche la nozione comune (C 3).

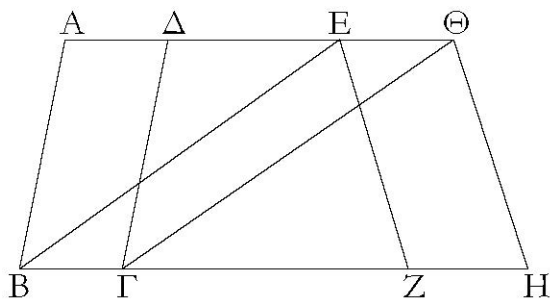
Euclide l'adopera fin da principio; cfr. le prop. (2), (5)...

$\triangle Z\Gamma$ (4).

Si tolga $\triangle H\Theta$, comune. Dunque il restante trapezio $ABH\triangle$ è eguale al restante trapezio $EHTZ$ (C3). Si aggiunga il triangolo $HBI\Gamma$, comune. Dunque tutto il parallelogrammo $AB\Gamma\triangle$ è eguale a tutto il parallelogrammo $EB\Gamma Z$.

Dunque, *i parallelogrammi sulla stessa base*, etc. c. d. d.

36. — *Parallelogrammi su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*



Siano i parallelogrammi $AB\Gamma\triangle$, $EZH\Theta$ su le basi eguali $B\Gamma$, ZH e nelle stesse parallele $A\Theta$, BH . Dico

che il parallelogramma $AB\Gamma\triangle$ è eguale a $EZH\Theta$.

Si conducano infatti BE , $\Gamma\Theta$. Poiché $B\Gamma$ è eguale a ZH e ZH è eguale ad $E\Theta$, anche $B\Gamma$ è eguale a $E\Theta$ (C1). Ma esse sono anche parallele, e le EB , $\Theta\Gamma$ le congiungono. Ma le congiungenti dalla stessa parte di rette eguali e parallele sono anch'esse parallele (33). Perciò $EB\Gamma\Theta$ è un parallelogramma (34), ed esso ancora eguale a $AB\Gamma\triangle$, poiché hanno la stessa base $B\Gamma$ e sono nelle stesse parallele (35), $B\Gamma$, $A\Theta$. Per la stessa ragione $EZH\Theta$ è

eguale allo stesso $EBF\Theta$. Perciò anche il parallelogrammo $ABF\Delta$ è eguale a $EZH\Theta$ (C1).

Dunque *parallelogrammi su basi eguali* etc. c. d. d.

37. — *Triangoli che sono sulla stessa base e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*³⁵

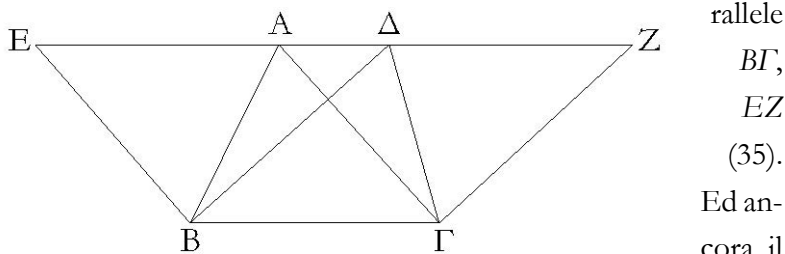
³⁵ Questa proposizione e la precedente mostrano come due figure piane possono aver la stessa area, senza aver lo stesso perimetro.

Il credere che il perimetro possa dare un'idea dell'area di una superficie, sembra esser stato un errore comune tra gli antichi scrittori ignari di matematica. TUCIDIDE, VI, 1, stima l'area della Sicilia dal tempo occorrente a navigarle intorno. PLINIO, VI, 208, per confrontare le diverse parti del mondo dice: «aptissime.... spectabitur ad longitudinem latitudine addita». QUINTILIANO, *Institutiones oratoriae*, I, cap. X, 39-52, dice: «*De Geometria.... Falsa quoque veris similia geometria ratione deprehendit... Nan quis non ita proponenti credat: Quorum locorum extremae lineae eandem mensuram colligunt, eorumque spatio quoque, quod his lineis continetur par sit necesse est? At id falsum est. Nam plurimum refert cuius formae sit ille circuitus; reprehensique a geometris sunt historici, quia magnitudinem insularum satis significari navigationis ambitu crediderunt*». QUINTILIANO enuncia poi

Siano i triangoli $\triangle AB\Gamma$, $\triangle B\Gamma\Delta$ sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse parallele $A\Delta$, $B\Gamma$. Dico che il triangolo $\triangle AB\Gamma$ è eguale al triangolo $\triangle B\Gamma\Delta$.

Si prolunghi $A\Delta$ da ognuna delle due parti, verso E , Z ; da B si conduca la BE parallela alla ΓA , e da Γ si conduca la ΓZ parallela alla $B\Delta$ (31).

Dunque $EB\Gamma A$, $\triangle B\Gamma Z$ sono entrambi parallelogrammi, e sono eguali, poiché sono sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse pa-



triangolo $\triangle AB\Gamma$ è la metà del parallelogramma $EB\Gamma A$, poiché il diametro AB divide questo per metà (34). Poi anche il triangolo

correttamente vari teoremi geometrici, ricordando che il circolo è la figura piana di area massima, tra quelle aventi lo stesso perimetro, e ricorre, per convincere i non geometri, ad un esempio numerico osservando che un quadrato avente per lato 10 passi ed i rettangoli aventi per lati 15×5 , ovvero 19×1 passi, hanno lo stesso perimetro, ma l'area assai diversa.

$\triangle B\Gamma$ è la metà del parallelogramma $\triangle BZ\Gamma$ poiché anche il diametro $\triangle \Gamma$ lo divide in due parti eguali. Dunque il triangolo $\triangle B\Gamma$ è eguale al triangolo $\triangle B\Gamma$.

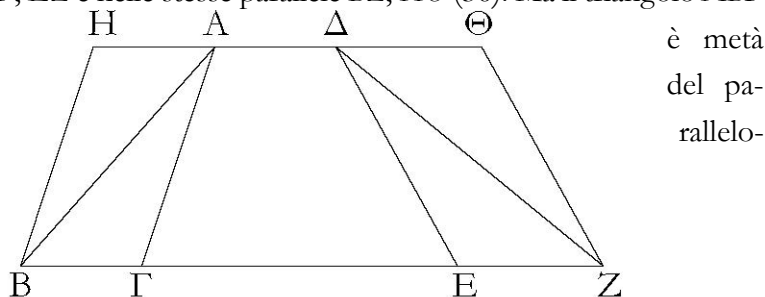
Dunque *triangoli che sono sulla stessa base etc. c. d. d.*

38. — *Triangoli che sono su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*

Siano i triangoli $\triangle B\Gamma$, $\triangle EZ$ sulle basi eguali $B\Gamma$, EZ e nelle stesse parallele BZ , $A\Delta$. Dico che il triangolo $\triangle B\Gamma$ è eguale al triangolo $\triangle EZ$.

Si prolunghi infatti $A\Delta$ da ognuna delle due parti verso H , Θ e per B si conduca alla ΓA la parallela BH , e per Z alla ΔE la parallela $Z\Theta$ (31).

Ognuno dei due $H\Gamma A$, $\triangle EZ\Theta$ è dunque un parallelogrammo. Ed è $H\Gamma A$ eguale a $\triangle EZ\Theta$. Poiché sono su basi eguali $B\Gamma$, EZ e nelle stesse parallele BZ , $H\Theta$ (36). Ma il triangolo $\triangle B\Gamma$

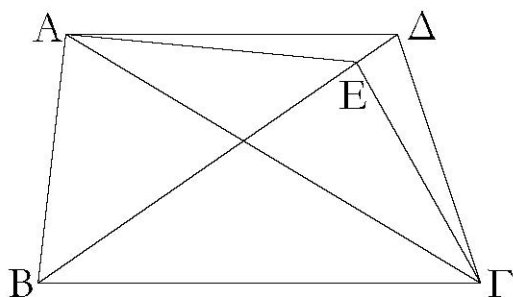


grammo $H\Gamma A$; infatti il diametro $\triangle B$ lo divide per metà (34). Ed il triangolo $\triangle ZE\Delta$ è metà del parallelogrammo $\triangle EZ\Theta$; infatti

il diametro ΔZ lo divide per metà (34). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ .

Dunque, *i triangoli che sono su basi eguali, etc., c. d. d.*

39. — *Triangoli eguali che sono sulla stessa base e dalla stessa parte, sono anche nelle stesse parallele.*



Siano i triangoli eguali $AB\Gamma$, ΔBF sulla stessa base $B\Gamma$, e dalla stessa parte di $B\Gamma$. Dico che sono anche nelle stesse paral-

lele.

Si conduca infatti la $A\Delta$. Dico che $A\Delta$ è parallela alla $B\Gamma$.

Se infatti non è, si conduca per il punto A alla retta $B\Gamma$ la parallela AE (31), e si congiunga la $E\Gamma$. Allora il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $EB\Gamma$, poiché è sulla stessa base $B\Gamma$ di esso, e nelle stesse parallele (37). Ma $AB\Gamma$ è eguale ΔBF ; dunque anche ΔBF è eguale a $EB\Gamma$ (C1), il maggiore al minore, il che è impossibile. Dunque AE non è parallela a $B\Gamma$. Similmente dimostreremo che nessun'altra eccetto $A\Delta$ è parallela. Dunque $A\Delta$ è parallela a $B\Gamma$.

Dunque, *triangoli eguali, etc. c. d. d.*

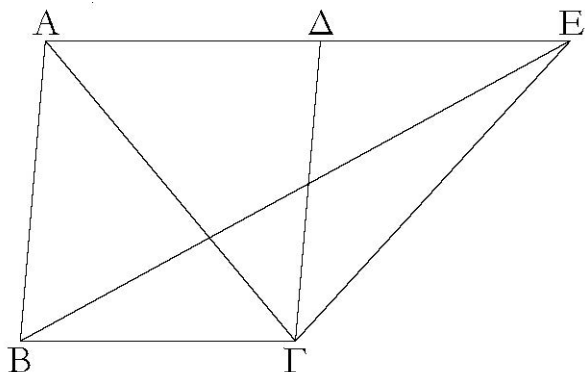
40. — [*Triangoli eguali su basi eguali e dalla stessa parte sono anche nelle stesse parallele*].³⁶

41. — *Se un parallelogrammo ha la stessa base di un triangolo, ed è nelle stesse parallele, il parallelogrammo è doppio del triangolo.*

Abbia infatti il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ la stessa base $B\Gamma$ del triangolo $EB\Gamma$ e sia nelle stesse parallele $B\Gamma$, AE . Dico che il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo BET .

³⁶ Questa proposizione non si trovava nel testo originario, ed è stata aggiunta da qualche commentatore. Così ha provato HEIBERG (*Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 50) adoperando un papiro scoperto al Fayum (*Fayūm Towns and their papyri*, p. 96 n. IX).

È da notarsi che il Tartaglia nella sua bella edizione di Euclide sente il bisogno di modificare la dimostrazione. La dimostrazione si conduce come quella della (39). La (40) non ha nessun uso nel seguito degli Elementi.

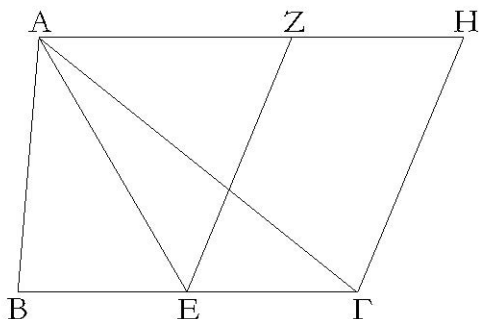
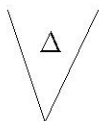


Si conduca infatti la ΔF . Il triangolo ABF è allora eguale al triangolo EBF ; poiché essi

sono sulla stessa base BF e nelle stesse parallele BF, AE (37). Ma il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo ABF , poiché il diametro AF lo divide per metà (34). Dunque anche il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo EBF .

Dunque, *se un parallelogrammo*, etc. c. d. d.

42. — *Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo eguale ad un dato triangolo.*



Sia
 $\triangle AB\Gamma$ il
 triangolo
 dato, e $\angle$
 l'angolo
 rettilineo
 dato. Si
 deve al-
 lora co-

struire nell'angolo $\angle$ un parallelogrammo eguale al triangolo $\triangle AB\Gamma$.

Si divida la $B\Gamma$ per metà in E (10), e si conduca la AE , e sulla retta ET nel punto E di essa si costruisca l'angolo ZET eguale all'angolo $\angle$ (23), e per A si conduca la AH parallela ad ET (31), e per Γ la ΓH parallela ad EZ . Dunque $ZETH$ è un parallelogrammo. E poiché BE è eguale ad ET , il triangolo ABE è eguale al triangolo AET , poiché sono su basi eguali BE , ET e tra le stesse parallele $B\Gamma$ AH (38). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è doppio del triangolo AET . Ma anche il parallelogrammo $ZETH$ è doppio del triangolo AET , perché ha la stessa base ed è nelle stesse parallele (41).

Dunque il parallelogrammo $ZETH$ è eguale al triangolo $AB\Gamma$ ed ha l'angolo TEZ eguale all'angolo dato $\angle$.

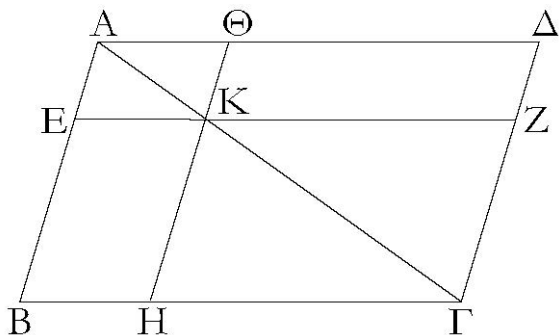
Dunque si è costruito nell'angolo TEZ , che è eguale all'angolo $\angle$, il parallelogrammo $ZETH$, eguale al triangolo dato $AB\Gamma$

c. d. f.

43. — *In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi intorno al diametro sono eguali tra loro.*

Sia il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ e il diametro di esso $A\Gamma$, e intorno alla diagonale $A\Gamma$ siano i parallelogrammi $E\Theta$, HZ . E siano BK , $K\Delta$ quelli che si chiamano *complementi*. Dico che il complemento BK è eguale al complemento $K\Delta$.

Poiché infatti $AB\Gamma\Delta$ è un parallelogrammo, ed $A\Gamma$ un diametro di esso, il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $A\Gamma\Delta$ (34). Ed ancora, poiché $E\Theta$ è un parallelogrammo, e un diametro di esso è AK , il triangolo AEK è eguale al triangolo $A\Theta K$. E per la stessa ragione anche il triangolo $KZ\Gamma$ è eguale al triangolo KHI (34). Poiché dunque il triangolo AEK è eguale al triangolo $A\Theta K$, e $KZ\Gamma$ a KHI , il triangolo AEK col triangolo KHI , è eguale al triangolo $A\Theta K$ col triangolo $KZ\Gamma$ (C2).



Ma tutto il triangolo $AB\Gamma$ è eguale a tutto $A\Gamma\Delta$. Dunque il resto, il complemento BK , è eguale al resto,

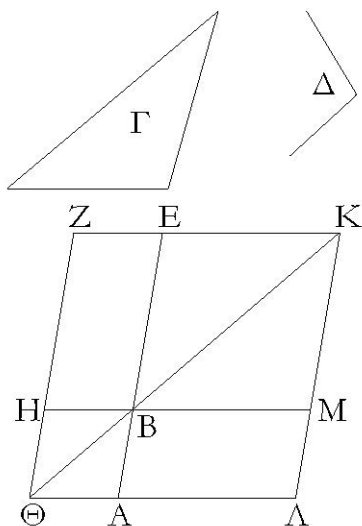
il complemento $K\angle$ (C3).

Dunque, *in ogni parallelogrammo*, etc. c. d. d.

44. — *Ad una retta data, in un angolo rettilineo dato, applicare un parallelogrammo eguale ad un triangolo dato.*

Sia AB la retta data, Γ il triangolo dato e $\angle$ l'angolo rettilineo dato. Si deve allora alla retta data AB , in un angolo eguale a $\angle$, applicare un parallelogrammo eguale al triangolo Γ .

Si costruisca il parallelogrammo $BEZH$ eguale al triangolo Γ , nell'angolo EBH , il quale sia eguale all'angolo $\angle$ (42); e si ponga in modo che la BE sia per diritto alla AB ; e si prolunghi la ZH in Θ , e per A si conduca la $A\Theta$ parallela ad ognuna delle due BH , EZ (31), e si conduca la ΘB . Poiché la ΘZ cade sulle due parallele $A\Theta$, EZ , gli angoli $A\Theta Z$, ΘZE sono eguali a due retti (29); perciò gli angoli $B\Theta H$, HZE son minori di due retti. Ma due rette [le quali incontrate da una terza] fanno gli angoli [interni e dalla stessa parte] minori di due retti, prolungate all'infinito si incontrano (P5). Dunque le ΘB , ZE prolungate si incontreranno.



Si prolunghino, e si incontrino in K , e per K si conduca la KA parallela ad entrambe le EA , $Z\Theta$ e si prolunghino le ΘA , HB fino ai punti, Λ , M .

Dunque ΘAKZ è un parallelogrammo, ΘK un suo diametro, e intorno a ΘK i parallelogrammi AH , ME , e quelli che si chiamano

complementi, AB , BZ . Dunque AB è eguale a BZ (48).

Ma BZ è eguale al triangolo Γ dunque anche AB è eguale a Γ (C1). E poiché l'angolo HBE è eguale a ABM (15), e HBE è eguale a $\angle$, dunque anche ABM è eguale all'angolo $\angle$.

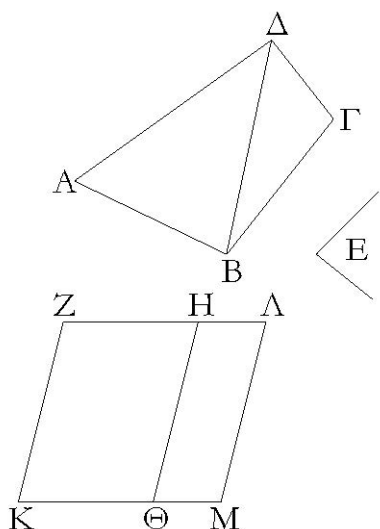
Dunque alla retta data AB , nell'angolo ABM che è eguale a $\angle$, è stato applicato il parallelogrammo AB , eguale al triangolo Γ c. d. f.

45. — *Costruire un parallelogrammo eguale ad una data figura rettilinea, in un angolo rettilineo dato.*³⁷

Sia $AB\Gamma\perp$ la figura rettilinea data, e sia E l'angolo rettilineo dato. Si deve allora costruire un parallelogrammo, nel dato angolo E eguale alla figura rettilinea $AB\Gamma\perp$.

³⁷ Le proposizioni (42), (44), (45) risolvono tre problemi (ciascuno dei quali è piú generale del precedente), relativi alla *trasformazione delle figure piane*. La (45) insegna a trasformare una qualunque figura rettilinea (poligono), in un parallelogrammo, avente un angolo dato ed una base data. Si possono quindi cosí trovare la somma o la differenza di due figure piane.

Soltanto nella (14) del libro II, Euclide insegnerà a trasformare un rettangolo, ovvero una qualunque figura piana in un quadrato.



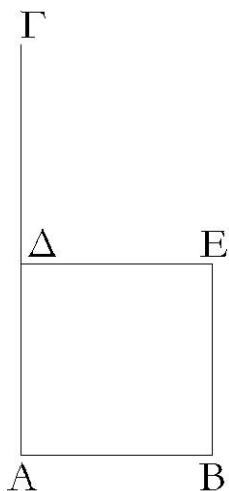
Si conduca la $\angle B$, e si costruisca un parallelogrammo $Z\Theta$ nell'angolo ΘKZ che sia eguale all'angolo E (42).

E alla retta $H\Theta$ si applichi il parallelogrammo HM nell'angolo $H\Theta M$ che sia eguale all'angolo E (44).³⁸

E poiché l'angolo E è eguale ad ognuno dei due ΘKZ , $H\Theta M$, anche ΘKZ è eguale a $H\Theta M$. Si aggiunge $K\Theta H$, comune. Dunque $ZK\Theta$, $K\Theta H$

³⁸ Così il testo nella traduzione del Vacca. Per una più completa traduzione del testo greco si dovrebbe leggere "Si conduca la $\angle B$, e si costruisca un parallelogrammo $Z\Theta$ eguale al triangolo $AB\Gamma$ nell'angolo ΘKZ che sia eguale all'angolo E (42). E alla retta $H\Theta$ si applichi il parallelogrammo HM eguale al triangolo $\angle B\Gamma$ nell'angolo $H\Theta M$ che sia eguale all'angolo E [Nota per l'edizione digitale *Manuzio*].

sono eguali a $K\Theta H$, $H\Theta M$ (C2). Ma $ZK\Theta$, $K\Theta H$ sono eguali a due retti (29), dunque anche $K\Theta H$, $H\Theta M$ sono eguali a due retti (C1). Dunque ad una retta $H\Theta$ ed al punto Θ di essa, le due rette $K\Theta$, ΘM , non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti; dunque $K\Theta$ è per diritto alla ΘM (14). E poichè la retta ΘH cade sulle due parallele KM , ZH , gli angoli alterni $M\Theta H$, ΘHZ sono eguali tra loro (29). Si aggiunga $\Theta H\Lambda$ comune, Allora $M\Theta H$, $\Theta H\Lambda$ sono eguali a ΘHZ , $\Theta H\Lambda$. Ma $M\Theta H$, $\Theta H\Lambda$ sono eguali a due retti (29). Dunque anche ΘHZ , $\Theta H\Lambda$ sono eguali a due retti. Dunque la ZH è per diritto alla $H\Lambda$ (14). E



poichè ZK è eguale e parallela a ΘH (34), ed anche ΘH ad $M\Lambda$, anche la KZ è eguale e parallela alla $M\Lambda$. E le congiungono le rette KM , $Z\Lambda$. Dunque anche le KM , $Z\Lambda$ sono eguali e parallele (30). Dunque $KZ\Lambda M$ è un parallelogrammo. E poichè il triangolo $AB\Delta$ è eguale al parallelogrammo $Z\Theta$, e $\Delta B\Gamma$ è eguale a HM , dunque tutta la figura rettilinea $AB\Gamma\Delta$ è eguale al parallelogrammo $KZ\Lambda M$.

Dunque nell'angolo ZKM , che è eguale all'angolo dato E , si è costruito il parallelogrammo $KZ\Lambda M$ eguale alla data figura rettilinea $AB\Gamma\Delta$; c. d. f.

46. — *Su una retta data descrivere un quadrato.*³⁹

Sia AB la retta data; si deve allora sulla retta AB descrivere un quadrato.

Si conduca alla retta AB , dal punto A su di essa la AI' ad angolo retto (11), e si ponga $A\perp$ eguale alla AB . E per il punto $\perp$ si conduca la AE parallela alla AB , e dal punto B la BE parallela alla $A\perp$ (31).

Dunque $A\perp EB$ è un parallelogramma, quindi la AB è eguale alla $\perp E$, e la $A\perp$ alla BE (34); ma AB è eguale alla $A\perp$; dunque le quattro BA , $A\perp$, AE , EB sono eguali tra loro (C1); dunque il parallelogramma $A\perp EB$ è equilatero.

Dico che è anche rettangolo. Poiché infatti la retta $A\perp$ cade sulle parallele AB , $\perp E$, i due angoli $BA\perp$, $A\perp E$ sono eguali a due retti (29). Ma $BA\perp$ è retto, dunque lo è anche $A\perp E$. Ma in uno spazio parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono eguali tra loro (34). Dunque son retti ognuno degli angoli opposti ABE , $BE\perp$.

³⁹ Nella (1) Euclide aveva insegnato a costruire un triangolo equilatero.

Nelle (11), (15), (16), del libro quarto insegnerà a costruire un pentagono regolare, un esagono regolare, ed un pentadecagono regolare.

Dunque $A\triangle EB$ è rettangolo. E già si è dimostrato che è equilatero. Dunque è un quadrato (T22), ed è descritto sulla retta AB .

47. — *Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato che sottende l'angolo retto, è eguale ai quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.*⁴⁰

⁴⁰ PROCLO osserva che la tradizione attribuisce questo teorema a PITAGORA, il quale avrebbe sacrificato un bue agli Dei per questa scoperta.

PLUTARCO (*Non posse suaviter vivi secundum Epicurum* c. 11), DIOGENE LAERZIO (VIII, 12) ed ATENEIO (X, 13) son concordi nell'attribuire a Pitagora questa proposizione.

Essa è però forse, assai più antica almeno in un caso semplice, quello in cui i cateti del triangolo rettangolo sono 3, 4 e quindi l'ipotenusa 5.

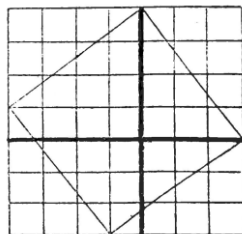
In un frammento di papiro della XII dinastia egiziana, scoperto a Kahun, M. CANTOR (*Archiv. d. Math. u. Phys.*, VIII. 1905, p. 66) ha trovato l'eguaglianza $3^2+2^2=5^2$ scritta in varî modi.

Forse anche gli antichi Babilonesi conoscevano questo risultato, sebbene esso non sia ancora stato ritrovato esplicitamente nei documenti pervenuti fino a noi. (Cfr. M. CANTOR, *Gesch. d. Math.*, III, ed., 1907, p. 49, 50).

Infine anche l'antico astronomo ed astrologo cinese il Duca CHÓU (pronuncia *Ción*), zio del re WU (1100 av. Cr.), si servì della

Sia il triangolo rettangolo $AB\Gamma$ avente l'angolo retto $B\Lambda\Gamma$. Dico che il quadrato di $B\Gamma$ è eguale ai quadrati di BA , $A\Gamma$.

Si costruisca infatti su $B\Gamma$ il quadrato $B\Lambda E\Gamma$, e su BA , $A\Gamma$, i quadrati HB , $\Theta\Gamma$ (46),



eguaglianza $3^2+2^2=5^2$, che dimostrò per mezzo di questa semplice figura (osservando cioè che il quadrato dell'ipotenusa si ottiene togliendo dal quadrato circoscritto 49, i quattro triangoli rettangoli esterni, ovvero due rettangoli 3×4 , ossia $49-24=25$), e si servì di questo risultato per costruire un angolo retto.

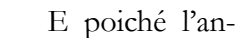
E così si fa oggi ancor talvolta in agrimensura, o in topografia quando non si possieda uno strumento più preciso. Si costruisce con un filo teso e ripiegato, un triangolo di lati, 3, 4, 5, e si ha così un angolo retto (48).

Di questo teorema che si chiama ordinariamente di *Pitagora* son state date interessanti ed assai varie dimostrazioni.

Son notevoli tra le altre, una di PAPPO (IV, p. 177), una dell'arabo THABIT IBN QURRA (826-901 d. Cr.), una trovata nei mss. di LEONARDO DA VINCI (1452-1519). Cfr. HEATH, vol. 1 p. 364-368.

E poiché ognuno dei due angoli $BA\Gamma$, BAH è retto, dunque

con una retta BA , e nel punto A di essa, le due rette AI, AH , non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti (14). Dunque IA è per diritto alla AH . E per la stessa ragione BA è per diritto alla AO .



E poiché $\angle B$ è eguale a $\angle \Gamma$ e ZB a BA (T22) dunque le due $\angle B, BA$ sono eguali alle due $ZB, \angle \Gamma$, ciascuna a ciascuna e l'angolo $\angle BBA$ è eguale all'angolo $ZB\Gamma$. Allora la base AA è eguale alla base $Z\Gamma$, ed il triangolo ABA è eguale al triangolo $ZB\Gamma$ (4).

E il parallelogrammo BA è doppio del triangolo $AB\Delta$, poich  hanno la stessa base $B\Delta$ e sono nelle stesse parallele $B\Delta$, AA (41). Ed ancora, il quadrato HB   doppio del triangolo ZBF , poich  hanno la stessa base ZB e sono nelle stesse parallele ZB , HF (41). Dunque il parallelogrammo BA   eguale al quadrato HB .

Similmente, congiunte le AE , BK , si dimostrer  che anche il parallelogrammo ΓA   eguale al quadrato $\Theta\Gamma$.

Dunque tutto il quadrato $B\Delta EF$   eguale ai due quadrati HB , $\Theta\Gamma$ (C2). Ed il quadrato $B\Delta EF$   costruito su $B\Gamma$ ed i quadrati HB , $\Theta\Gamma$ su le BA , $A\Gamma$. Dunque il quadrato del lato $B\Gamma$   eguale ai quadrati dei lati BA , $A\Gamma$.

Dunque, *nei triangoli rettangoli*, etc. c. d. d.

48. — *Se in un triangolo il quadrato di un lato   eguale ai quadrati dei due restanti lati del triangolo, l'angolo compreso dai due restanti lati del triangolo   retto.*⁴¹

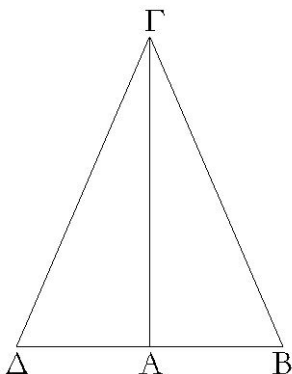
⁴¹ In questa dimostrazione EUCLIDE ammette che: *se due quadrati sono eguali, sono eguali anche le loro basi*. Gi  PROCLO aveva sentito il bisogno di dimostrare questa proposizione, e la sua inversa, e pi  recentemente DE MORGAN (*Companion to the Almanac for 1849*, p. 8) aveva pure proposto di introdurla dopo la (46).

Ma la verit  della inversa, cio : *sono eguali i quadrati costruiti su basi eguali* si deduce colla semplice applicazione di un principio

Infatti nel triangolo $AB\Gamma$ sia il quadrato del lato $B\Gamma$ eguale ai quadrati dei lati BA , $A\Gamma$. Dico che l'angolo $BA\Gamma$ è retto.

Si conduca infatti dal punto A la retta $A\Delta$ ad angolo retto alla $A\Gamma$ (11) e si ponga la $A\Delta$ eguale alla BA , e si congiunga la $\Delta\Gamma$.

Poiché la ΔA è eguale alla AB , il quadrato della ΔA è eguale al quadrato della AB . Si aggiunga il quadrato della $A\Gamma$ comune. I quadrati di ΔA , $A\Gamma$ sono dunque eguali ai quadrati di BA , $A\Gamma$ (C2). Ma il quadrato di $\Delta\Gamma$ è eguale ai quadrati di ΔA , $A\Gamma$, infatti l'angolo $\Delta A\Gamma$ è retto (47); ed il quadrato di $B\Gamma$ è eguale ai quadrati di BA , $A\Gamma$, ciò infatti si è supposto. Dunque anche il quadrato di $\Delta\Gamma$ è eguale al



logico il quale dice che: *se su due enti eguali si eseguisce la stessa operazione, i risultati sono eguali* (cfr. PEANO, *Aritmetica* etc. p. 49).

La proposizione diretta si dimostra subito osservando che se due rette sono diseguali, i quadrati costruiti su di esse sono diseguali, e quindi con una semplice regola di logica (enunciata nella nota alla (18), p. 50) si deduce la proposizione. Queste osservazioni possono spiegare perché Euclide non abbia creduto opportuno enunciare esplicitamente le due proposizioni.

quadrato di BI (C 1), perciò anche la $\angle I$ è eguale alla BI . Ma poiché anche la $\angle A$ è eguale alla AB , e la AI è comune, le due $\angle A$, AI sono eguali alle due BA , AI e la base $\angle I$ è eguale alla base BI ; dunque l'angolo $\angle AAI$ è eguale all'angolo BAI (8). Ma $\angle AAI$ è retto, dunque anche BAI è retto.

Se dunque, *in un triangolo*, etc. c. d. d.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

A

α'

Όροι

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε'. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ς'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφανεία ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὄταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾖσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί, καὶ ἡ ἐφρεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφεστήκεν.

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Ὁξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὁρος ἐστὶν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

ιδ'. Σχήμα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὄρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ισ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἣτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστὶν.

ιθ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολὺπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα'. Ἐπὶ δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν

τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθήν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ'. Τῶν δὲ τετραπλευρῶν σχημάτων τετραγώνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστίν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετραπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.

κγ'. Παράλληλοι εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτήματα.

α'. Ἡτιθήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν·

β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν·

γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι·

δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι·

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοινὰ ἔννοιαι.

α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.

δ'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

ε'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν.

α'.

**Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τριγώνων
ισόπλευρον συστήσασθαι.**

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τριγώνων ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ

ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπὴ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση. ἐκατέρω ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα

καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κεῖσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρον μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγραφθῇ ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφίρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέρωθεν ἑκατέρω καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ

τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσῃν ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ' ὧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $A\Gamma$ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ ἴσας ἔχοντα ἑκατέρω ἑκατέρω τὴν μὲν AB τῇ ΔE τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ BAG γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴσῃν. λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ' ὧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔEZ , ἡ δὲ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῇ ὑπὸ $\Delta Z E$.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔE , ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ E διὰ τὸ ἴσῃν εἶναι τὴν AB τῇ ΔE · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς AB ἐπὶ τὴν ΔE ἐφαρμόσει καὶ ἡ $A\Gamma$ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔZ διὰ τὸ ἴσῃν εἶναι τὴν ὑπὸ BAG γωνίαν τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ · ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσῃν πάλιν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῇ ΔZ . ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόσει· ὥστε βάσις ἡ $B\Gamma$ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Z ἡ $B\Gamma$ βάσις ἐπὶ τὴν EZ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι

χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσεις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρῃ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρῃ ἐκατέρῃ, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ προσεμβληθεῖσιν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεμβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰληφθῶ γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφηρησθῶ

ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AE τῇ ἐλάσσονι τῇ AZ ἴση ἢ AH, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ZΓ, HB εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AZ τῇ AH ἢ δὲ AB τῇ AG, δύο δὲ αἱ ZA, AG ὁμοῖαι ταῖς HA, AB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωρα ἑκατέρωρα· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ZAH· βάσις ἄρα ἡ ZΓ βάσει τῇ HB ἴση ἐστίν, καὶ τὸ AZΓ τρίγωνον τῷ AHB τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρωρα ἑκατέρωρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ AGZ τῇ ὑπὸ ABH, ἡ δὲ ὑπὸ AZΓ τῇ ὑπὸ AHB. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ AZ ὅλη τῇ AH ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ AB τῇ AG ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ BZ λοιπῇ τῇ GH ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZΓ τῇ HB ἴση· δύο δὲ αἱ BZ, ZΓ ὁμοῖαι ταῖς GH, HB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωρα ἑκατέρωρα· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BZΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓHB ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ BG· καὶ τὸ BZΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓHB τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρωρα ἑκατέρωρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ZBΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἢ δὲ ὑπὸ BΓZ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ABH γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ AGZ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ BΓZ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ AΓB ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει τοῦ ABΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZBΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· αἱ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ προσηκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ

τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἐτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἐκατέρω ἐκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω οὐ συσταθῇσονται πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω συσταθῇσονται πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχη

ἐκατέρωθεν ἐκατέρωθεν, ἔχη δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν
γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν
περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB ,
 AG ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ ἴσας ἔχοντα ἐκατέρωθεν
ἐκατέρωθεν, τὴν μὲν AB τῇ ΔE τὴν δὲ AG τῇ ΔZ · ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν
τὴν $B\Gamma$ βάσει τῇ EZ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAG γωνία
τῇ ὑπὸ EDZ ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔEZ τριγώνον
καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν B σημείου ἐπὶ τὸ E σημεῖον τῆς δὲ $B\Gamma$
εὐθείας ἐπὶ τὴν EZ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z διὰ τὸ
ἴσην εἶναι τὴν $B\Gamma$ τῇ EZ . ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς $B\Gamma$ ἐπὶ τὴν EZ
ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ BA , GA ἐπὶ τὰς ED , DZ . εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ
 $B\Gamma$ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ BA , AG πλευραὶ ἐπὶ τὰς
 ED , DZ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὥς αἱ EH , HZ ,
συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις
ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἐκατέρωθεν ἐκατέρωθεν πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω
σημεῖω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέριτα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται
δὲ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς $B\Gamma$ βάσεως ἐπὶ τὴν EZ βάσιν
οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ BA , AG πλευραὶ ἐπὶ τὰς ED , DZ .
ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAG ἐπὶ γωνίαν τὴν
ὑπὸ EDZ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέρωθεν ἐκατέρω καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχη, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον διχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν διχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία διχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἐκατέρωθεν ἐκατέρω. καὶ βάσεις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ διχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι'

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην διχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB · δεῖ δὴ τὴν AB εὐθεῖαν πεπερασμένην διχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $ABΓ$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία διχα τῇ $ΓΔ$ εὐθείᾳ. λέγω ὅτι ἡ AB εὐθεῖα διχα τέτμηται κατὰ τὸ $Δ$ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, δύο δὲ αἱ $ΑΓ$, $ΓΔ$ δύο ταῖς $ΒΓ$, $ΓΔ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ $ΑΔ$ βάσει τῇ $ΒΔ$ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB διχα τέτμηται κατὰ τὸ $Δ$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ $Γ$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ $Γ$ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ τυχὸν σημεῖον τὸ $Δ$, καὶ κείσθω τῇ $ΓΔ$ ἴση ἡ $ΓΕ$, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς $ΔΕ$ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $ΖΔΕ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΖΓ$. λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ $Γ$ πρὸς ὀρθὰς γωνίας

εὐθεία γραμμὴ ἥκται ἢ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωα ἑκατέρωα· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστὶν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶν, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρωα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρωα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἢ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ. δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα διχα κατὰ τὸ Θ,

καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἥκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ βάσεις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἥκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἦτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιεῖτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ. λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἦτοι δύο ὀρθαὶ εἰσὶν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσὶν. εἰ δὲ οὐ, ἥχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ

ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσὶν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισιὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσὶν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισιὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσὶν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισιὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσὶν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἦτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ἐὰν πρὸς τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖτωσαν. λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ'

εὐθείας ἢ BE.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ AB ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ABΓ, ABE γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ABΓ, ABD δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ABE ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ABD ἴσαι εἰσὶν. κοινὴ ἀφηγήσθω ἢ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ABE λοιπὴ τῇ ὑπὸ ABD ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἢ BE τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρὸς τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῶσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ AEG γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἢ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἢ AE ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκεν γωνίας ποιῶσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν

ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφηρηθῶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δεიχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεβελήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστίν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ

αί ΑΕ, ΕΒ δυοὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἢ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τρίγωνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων δέ ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὅμοίως δὲ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἢ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἢ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τρίγωνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἢ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Παντὸν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γάρ ἢ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτὸς ἐστὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ· κοινὴ προσκείσθω ἢ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ,

ΒΓΑ μείζονές εισιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εισιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εισι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εισι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ. λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ

μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τριγώνον ἐστὶ τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΒΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα'.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περᾶτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περᾶτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν

ὕπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῶ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταῦτά τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περᾶτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τριγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας

εἶναι πάντη μεταλαμβανομένης.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A, B, Γ , ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν A, B τῆς Γ , αἱ δὲ A, Γ τῆς B , καὶ ἔτι αἱ B, Γ τῆς A . δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς A, B, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔE πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ , ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ E , καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ ΔZ , τῇ δὲ B ἴση ἡ ZH , τῇ δὲ Γ ἴση ἡ $H\Theta$. καὶ κέντρῳ μὲν $\tau\tilde{\omega}$ Z , διαστήματι δὲ $\tau\tilde{\omega}$ $Z\Delta$ κύκλος γεγράφθω ὁ $\Delta K\Lambda$. πάλιν κέντρῳ μὲν $\tau\tilde{\omega}$ H , διαστήματι δὲ $\tau\tilde{\omega}$ $H\Theta$ κύκλος γεγράφθω ὁ $K\Lambda\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KZ, KH . λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς A, B, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ KZH .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Delta K\Lambda$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $Z\Delta$ τῇ ZK . ἀλλὰ ἡ $Z\Delta$ τῇ A ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ A ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Lambda K\Theta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ HK . ἀλλὰ ἡ $H\Theta$ τῇ B ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KH ἄρα τῇ B ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ZH τῇ Γ ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ KZ, ZH, HK τρισὶ ταῖς A, B, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν KZ, ZH, HK , αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς A, B, Γ , τρίγωνον συνέσταται τὸ KZH . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθυγράμμον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$. δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$ ἴσην γωνίαν εὐθυγράμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν $\Gamma\Delta$, $\GammaΕ$ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ , E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔE : καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς $\Gamma\Delta$, ΔE , $\GammaΕ$, τριγώνον συνεστάτω τὸ AZH , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν $\Gamma\Delta$ τῇ AZ , τὴν δὲ $\GammaΕ$ τῇ AH , καὶ ἔτι τὴν ΔE τῇ ZH .

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ $\Delta\Gamma$, $\GammaΕ$ δύο ταῖς ZA , AH ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ βάσις ἡ ΔE βάσει τῇ ZH ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ ZAH ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$ ἴση γωνία εὐθυγράμμος συνέσσεται ἡ ὑπὸ ZAH : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέρω ἑκατέρω, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν

ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $A\Gamma$ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ ἴσας ἔχοντα ἑκατέρωθεν ἑκατέρω, τὴν μὲν AB τῇ ΔE τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ , ἡ δὲ πρὸς τῷ A γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας, μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ $B\Gamma$ βάσεως τῆς EZ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔE εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $E\Delta H$, καὶ κείσθω ὁποτέρω τῶν $A\Gamma$, ΔZ ἴση ἡ ΔH , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EH , ZH .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔH , δύο δὲ αἱ BA , $A\Gamma$ δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔH ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta H$ ἴση· βάσις ἄρα ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ EH ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔZ τῇ ΔH , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔHZ γωνία τῇ ὑπὸ ΔZH · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔZH τῆς ὑπὸ EHZ · πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZH τῆς ὑπὸ EHZ . καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ EZH μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ EZH γωνίαν τῆς ὑπὸ EHZ , ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ EH τῆς EZ . ἴση δὲ ἡ EH τῇ $B\Gamma$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς EZ .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἑκατέρωθεν ἑκατέρω, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχη τὴν ὑπὸ

τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρω, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχη, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $ΑΓ$ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς $ΔE$, $ΔZ$ ἴσας ἔχοντα ἐκατέραν ἐκατέρω, τὴν μὲν AB τῇ $ΔE$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔZ$ · βάσις δὲ ἡ $ΒΓ$ βάσεως τῆς EZ μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ · ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ $ΒΓ$ βάσει τῇ EZ · οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ · οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$ · ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ $ΒΓ$ βάσεως τῆς EZ · οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἐκατέραν ἐκατέρω, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχη, καὶ τὴν

γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχη ἑκατέρωθεν ἑκατέρω καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἥτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει [ἑκατέρωθεν ἑκατέρω] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔEZ , $EZ\Delta$ ἴσας ἔχοντα ἑκατέρωθεν ἑκατέρω, τὴν μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔEZ , τὴν δὲ ὑπὸ $B\Gamma A$ τῇ ὑπὸ $EZ\Delta$ · ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρῶτερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν $B\Gamma$ τῇ EZ . λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέρωθεν ἑκατέρω, τὴν μὲν AB τῇ ΔE , τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ , καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ EDZ .

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ AB τῇ ΔE , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ AB , καὶ κείσθω τῇ ΔE ἴση ἡ BH , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $H\Gamma$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν BH τῇ ΔE , ἡ δὲ $B\Gamma$ τῇ EZ , δύο δὲ αἱ BH , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρω· καὶ

γωνία ἢ ὑπὸ HBG γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ HF βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ HBG τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ HGB γωνία τῇ ὑπὸ ΔZE. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔZE τῇ ὑπὸ BGA ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BΓH ἄρα τῇ ὑπὸ BGA ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ AB τῇ ΔE· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ BΓ τῇ EZ ἴση· δύο δὴ αἱ AB, BΓ δυσὶ ταῖς ΔE, EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστίν ἴση· βάσις ἄρα ἡ AΓ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EDZ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὥς ἡ AB τῇ ΔE. λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν AΓ τῇ ΔZ, ἡ δὲ BΓ τῇ EZ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EDZ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ BΓ τῇ EZ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ BΓ, καὶ κείσθω τῇ EZ ἴση ἡ BΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ μὲν BΘ τῇ EZ ἡ δὲ AB τῇ ΔE, δύο δὴ αἱ AB, BΘ δυσὶ ταῖς ΔE, EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ AΘ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ABΘ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἂς αἱ

ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τριγώνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρω καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παρὰλληλοι ἔσσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω. λέγω ὅτι παρὰλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ B, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ A, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ B, Δ μέρη κατὰ τὸ H. τριγώνου δὴ τοῦ HEZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AEZ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EZH· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB, ΔΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ B, Δ μέρη. Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ A, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερά τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοι εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ HΘΔ ἴσην ποιεῖτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ BHΘ, HΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παρὰλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσὶν· κοινὴ ἀφηρηθῶ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παρὰλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παρὰλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παρὰλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παρὰλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπττω ἡ ΕΖ. λέγω ὅτι τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ,

ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονες εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτάς ὑποκείσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστίν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστίν ἴση· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἐκατέρω τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τῇ EZ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπίπτει γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεία ἡ HK .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παράλληλους εὐθείας τὰς AB , EZ εὐθεία ἐμπίπτει ἡ HK , ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AHK τῇ ὑπὸ $H\Theta Z$. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παράλληλους εὐθείας τὰς EZ , $\Gamma\Delta$ εὐθεία ἐμπίπτει ἡ HK , ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $H\Theta Z$ τῇ ὑπὸ $HK\Delta$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AHK τῇ ὑπὸ $H\Theta Z$ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ AHK ἄρα τῇ ὑπὸ $HK\Delta$ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $B\Gamma$. δεῖ δὴ διὰ τοῦ A σημείου τῇ $B\Gamma$ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $A\Delta$. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ $A\Delta\Gamma$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $\Delta A E$. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ EA εὐθεῖα ἡ AZ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς $B\Gamma$, EZ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ $A\Delta$

τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παρὰλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παρὰλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ᾗσται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ. καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παρὰλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παρὰλληλός ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παρὰλληλός ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ

ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παρὰλληλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παρὰλληλοί εἰσιν.

Ἐστωσαν ἴσαι τε καὶ παρὰλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παρὰλληλοί εἰσιν.

Ἐπεξέχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παρὰλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστίν

ἴση, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $B\Gamma\Delta$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται ἑκατέρω ἑκατέρω, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AGB γωνία τῇ ὑπὸ $GB\Delta$. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς AG , $B\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ $B\Gamma$ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παρὰλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AG τῇ $B\Delta$. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παρὰλληλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιξυγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παρὰλληλοὶ εἰσιν ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ'.

Τῶν παρὰλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ διχα τέμνει.

Ἐστω παρὰλληλόγραμμον χωρίον τὸ $AG\Delta B$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $B\Gamma$. λέγω ὅτι τοῦ $AG\Delta B$ παρὰλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ $B\Gamma$ διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παρὰλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ $B\Gamma$, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ παρὰλληλός ἐστὶν ἡ AG τῇ $B\Delta$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ $B\Gamma$, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ AGB , $GB\Delta$

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ δυοὶ ταῖς ὑπὸ $B\Gamma\Delta$, $\Gamma B\Delta$ ἴσας ἔχοντα ἐκατέρωθεν ἐκατέρω καὶ μίαν πλευράν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν $B\Gamma$ καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει ἐκατέρωθεν ἐκατέρω καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἢ μὲν AB πλευρὰ τῇ $\Gamma\Delta$, ἢ δὲ AB τῇ $B\Delta$, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἢ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$, ἢ δὲ ὑπὸ $\Gamma B\Delta$ τῇ ὑπὸ $\Lambda\Gamma B$, ὅλη ἄρα ἢ ὑπὸ $AB\Delta$ ὅλη τῇ ὑπὸ $\Lambda\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἢ ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ διχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἢ AB τῇ $\Gamma\Delta$, κοινὴ δὲ ἢ $B\Gamma$, δύο δὴ αἱ AB , $B\Gamma$ δυοὶ ταῖς $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν ἐκατέρωθεν ἐκατέρω καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἢ AB τῇ ΔB ἴση. καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $B\Gamma\Delta$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα $B\Gamma$ διάμετρος διχα τέμνει τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλη τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶν ἴση ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ.

λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ $EZH\Theta$.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ BE , $\Gamma\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ ZH , ἀλλὰ ἡ ZH τῇ $E\Theta$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῇ $E\Theta$ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παραλλήλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ EB , $\Theta\Gamma$. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $EB\Gamma\Theta$. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $AB\Gamma\Delta$. βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν $B\Gamma$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς $B\Gamma$, $A\Theta$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $EZH\Theta$ τῷ αὐτῷ τῷ $EB\Gamma\Theta$ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ $EZH\Theta$ ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $A\Delta$, $B\Gamma$. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τριγώνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ $A\Delta$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ E , Z , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῇ ΓA παραλλήλος ἦχθω ἡ BE , διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ $B\Delta$ παραλλήλος ἦχθω ἡ ΓZ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον

τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καὶ εἰσιν ἴσα· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΗΒΓΑ

παρὰλληλογράμμου ἤμισυ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει· τοῦ δὲ $\Delta EZ\Theta$ παρὰλλη-λογράμμου ἤμισυ τὸ $ZE\Delta$ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔZ διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παρὰλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παρὰλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς $B\Gamma$. λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παρὰλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $ΑΔ$. λέγω ὅτι παρὰλληλός ἐστιν ἡ $ΑΔ$ τῇ $B\Gamma$.

Εἰ γὰρ μή, ἦχθω διὰ τοῦ A σημείου τῇ $B\Gamma$ εὐθείᾳ παρὰλληλος ἡ AE , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $E\Gamma$. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $E B\Gamma$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παρὰλλήλοις. ἀλλὰ τὸ $AB\Gamma$ τῷ $\Delta B\Gamma$ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ ἄρα τῷ $E B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παρὰλληλός ἐστιν ἡ AE τῇ $B\Gamma$. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς $ΑΔ$ · ἡ $ΑΔ$ ἄρα τῇ $B\Gamma$

ἐστὶ παραλλήλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ'.

[Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν.]

μα'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γάρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἔχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ. λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δὴ ἐστι τὸ ΑΒΓ τριγώνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον

καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ

παρὰλληλόγραμμον τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓEZ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ .

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ $AB\Gamma$ ἴσον παρὰλληλόγραμμον συνέσσεται τὸ $ZEGH$ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓEZ , ἣτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ . ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ'.

Παντὸς παρὰλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παρὰλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παρὰλληλόγραμμον τὸ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ AG , περὶ δὲ τὴν AG παρὰλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ $E\Theta$, ZH , τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ BK , $K\Delta$. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ BK παραπλήρωμα τῷ $K\Delta$ παραπλήρωματι.

Ἐπεὶ γὰρ παρὰλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ AG , ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Gamma\Delta$ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παρὰλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ $E\Theta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ AK , ἴσον ἐστὶ τὸ AEK τρίγωνον τῷ $A\Theta K$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $KZ\Gamma$ τρίγωνον τῷ $K\eta\Gamma$ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν AEK τρίγωνον τῷ $A\Theta K$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ $KZ\Gamma$ τῷ $K\eta\Gamma$, τὸ AEK τρίγωνον μετὰ τοῦ $K\eta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ $A\Theta K$ τριγώνῳ μετὰ τοῦ $KZ\Gamma$. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ὅλον τῷ $A\Delta\Gamma$ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ BK παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ $K\Delta$

παρὰ πλεωρόματι ἐστὶν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παρὰλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παρὰλληλογράμμων τὰ παρὰ πλεωρόματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ'.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παρὰλληλόγραμμον παρὰβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παρὰλληλόγραμμον παρὰβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παρὰλληλόγραμμον τὸ BEZH ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EBH, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν BE τῇ AB, καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν BH, EZ παρὰλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παρὰλλήλους τὰς ΑΘ, EZ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἅπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται.

ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτεύωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτερεὰ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἦχθω ἢ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεία. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΑΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΑΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνία ἐστὶν ἴση.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἣ ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεξεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἣ ἐστὶν ἴση τῇ

E · καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν $H\Theta$ εὐθεῖαν τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ HM ἐν τῇ ὑπὸ $H\Theta M$ γωνίᾳ, ἣ ἐστὶν ἴση τῇ E . καὶ ἐπεὶ ἡ E γωνία ἐκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘKZ , $H\Theta M$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘKZ ἄρα τῇ ὑπὸ $H\Theta M$ ἐστὶν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $K\Theta H$ · αἱ ἄρα ὑπὸ $ZK\Theta$, $K\Theta H$ ταῖς ὑπὸ $K\Theta H$, $H\Theta M$ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ $ZK\Theta$, $K\Theta H$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ $K\Theta H$, $H\Theta M$ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. πρὸς δὴ τινι εὐθείᾳ τῇ $H\Theta$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ $K\Theta$, ΘM μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Theta$ τῇ ΘM · καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς KM , ZH εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘH , αἱ ἐναλλὰξ γωναὶ αἱ ὑπὸ $M\Theta H$, ΘHZ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $\Theta H\Lambda$ · αἱ ἄρα ὑπὸ $M\Theta H$, $\Theta H\Lambda$ ταῖς ὑπὸ ΘHZ , $\Theta H\Lambda$ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ $M\Theta H$, $\Theta H\Lambda$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘHZ , $\Theta H\Lambda$ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $H\Lambda$. καὶ ἐπεὶ ἡ ZK τῇ ΘH ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘH τῇ $M\Lambda$, καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ $M\Lambda$ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτάς εὐθεῖαι αἱ KM , $Z\Lambda$ · καὶ αἱ KM , $Z\Lambda$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παραλλήλοι εἰσὶν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $KZ\Lambda M$. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν $AB\Delta$ τριγώνον τῷ $Z\Theta$ παραλληλογράμῳ, τὸ δὲ $\Delta B\Gamma$ τῷ HM , ὅλον ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta$ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ $KZ\Lambda M$ παραλληλογράμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλλήλογράμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἦχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθᾶς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἐκατέρω τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν.

Ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς AB εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ABΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ BAG γωνίαν. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AΓ τετραγώνοις.

Αναγεγράφω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς BΓ τετράγωνον τὸ BΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν BA, AΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὀποτέρᾳ τῶν BΔ, ΓΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ BAG, BAH γωνιῶν, πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ BA καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ AΓ, AH μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ AH. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ BA τῇ AΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔBΓ γωνία τῇ ὑπὸ ZBA· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρᾳ· κοινὴ προσκείμεθω ἡ ὑπὸ ABΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBA ὅλη τῇ ὑπὸ ZBΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔB τῇ BΓ, ἡ δὲ ZB τῇ BA, δύο δὴ αἱ ΔB, BA δύο ταῖς ZB, BΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ

ΔΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὲ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη'.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ

τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν.

Τριγώνου γάρ τοῦ $AB\Gamma$ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς $B\Gamma$ πλευρᾶς τετραγώνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AG πλευρῶν τετραγώνοις. λέγω ὅτι ὀρθή ἐστίν ἡ ὑπὸ BAG γωνία.

Ἦχθω γάρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AG εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AD καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ AD , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $D\Gamma$. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ DA τῇ AB , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς DA τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν DA , AG τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AG τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν DA , AG ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $D\Gamma$ · ὀρθή γάρ ἐστίν ἡ ὑπὸ $DA\Gamma$ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BA , AG ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ · ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $D\Gamma$ τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $D\Gamma$ τῇ $B\Gamma$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ DA τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ AG , δύο δὴ αἱ DA , AG δύο ταῖς BA , AG ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσεις ἡ $D\Gamma$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $DA\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ BAG ἐστὶν ἴση. ὀρθή δὲ ἡ ὑπὸ $DA\Gamma$ · ὀρθή ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ BAG .

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετραγώνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

GLOSSARIO

In un primo studio è conveniente, leggere rapidamente i *postulati* e le *nozioni comuni*, e poi subito la prima proposizione (p. 4), tralasciando le lunghe spiegazioni dei *termini geometrici*, poiché esse, pur avendo avuto ragione di essere per i greci, sono poco utili a noi, ai quali questi termini sono notissimi e fanno oramai parte della lingua comune.

Per facilitar l'uso di questo glossario, sono perciò state escluse le parole, appartenenti alla lingua comune dei greci, le quali compaiono soltanto nelle pp. 86-88.

Dei verbi sono date le varie forme adoperate nel testo, sotto la forma dell'infinito presente. Delle altre parole è data soltanto una delle forme adoperate.

ἄγειν condurre

ἤχθω, ἤχθωσαν, ἤκται, ἀγαγεῖν

αἰτεῖν domandare

ἡτήσθω

αἰτήματα postulati

ἀδύνατον impossibile

ἀλλά ma

ἀλλήλους l'un l'altro

ἀναγρᾶφειν costruire

ἀναγεγράφθω, ἀναγράφαι, ἀναγραφέν, ἀναγεγραμμένον
 ἄνισος diseguale
 ἄπειρος infinito
 ἀπεναντίον opposto
 ἀπό da
 ἄρα dunque
 ἀρχή principio
 ἄτοπος assurdo
 αὐτός stesso
 ἀφαιρεῖν togliere
 ἀφαιρεθῇ, ἀφηρῆσθω, ἀφήρηται, ἀφελεῖν
 βάσις base
 γὰρ poiché
 γράφειν descrivere
 γράφεσθαι, γεγράφθω
 γραμμή linea
 γωνία angolo
 δέ poi, dunque
 δεικνύναι dimostrare
 δείξομεν, δείξαι, ἐδείχθη, ἐδείχθησαν, δειχθήσεται
 δεῖν esser necessario
 δεῖ, ἔδει
 διά per
 διάγειν condurre

διήχθω

διάμετρος diagonale, diametro

διάστημα distanza

διδόναι dare

δοθέν, δοθέντος, δοθέντι, δοθείσα, δοθείσης, δοθείση,

δοθείσαν, δοθείσαι, δοθεισῶν, δοθείσαις

διπλάσιος doppio

δίχα per metà

δυνατόν possibile

δύο due

ἐάν se

εἴ se

εἶναι essere

ἐστίν, εἰσίν, ἔστω, ἔστωσαν, ἔσται, ἔσονται, ὧσιν, ἦ, ὄντα

εἰς verso

ἐκάτερος l'uno e l'altro

ἐκ da

ἐκτός fuori

ἐκβάλλειν prolungare

ἐκβεβλήσθω, ἐκβεβλήσθωσαν, ἐκβαλεῖν, ἐκβαλλομένας,

ἐκβαλλομέναι

ἐκκειῖσθαι esser preso

ἐκκείσθω

ἐλάσσων minore

ἐμπίπτειν incontrare

ἐμπιπτέτω, ἐμπέπτωκεν, ἐνέπεσεν, ἐμπίπτουσα

ἐν in

ἐντός entro

ἐναλλάξ alternamente

ἐννοια nozione

ἐξ da

ἐπεὶ poiché

ἐπὶ su, per

ἐπιζευγνύναι congiungere

ἐπιζευγνύουσιν, ἐπεζεύχθω, ἐπεζεύχθωσαν,

ἐπιζευγνύτωσαν, ἐπιζευγνύτωσαν, ἐπιζευχθεῖσα,

ἐπιζευγνυμένων, ἐπιζευγνύουσαι

ἕτερος altro

εὐθεία retta

εὐθύγραμμον rettilineo

ἐφαρμόζειν coincidere

ἐφαρμόζοντα, ἐφαρμοζόμενες, ἐφαρμοζομένου,

ἐφαρμόσει, ἐφαρμοσάσης, ἐφαρμόσαντος, ἐφαρμόσουσιν

ἐφεξῆς di seguito

ἐφιστάναι erigere

ἐφέστηκεν, ἐφέστηκυῖα

ἔχειν avere

ἔχει, ἔχουσιν, ἐχέτω, ἔχῃ, ἔχον, ἔχοντα, ἔχουσαν, ἔχουσαι,
ἔξει

ἧ che

ἧμισυ metà

ἦτοι onvero

ἴσος eguale

ἰσόπλευρον equilatero

ἰσοσκελές isoscele

κάθετος cateto

καί e

καλεῖν chiamare

καλεῖται

κατά per, ad

καταλειπόμενον rimanente

κεῖσθαι esser posto

κείσθω, κείμεναι

κέντρον centro

κοινή comune

κορυφή vertice

κύκλος circolo

λαμβάνειν prendere

εἰλήφθω

λέγειν dire

λέγω, λέγόμενα

λείπειν lasciare
λοιπός resto
μείζων maggiore
μέν pure, bensì
μέρος parte
μετά con
μεταλαμβάνειν permutare
μεταλαμβανόμεναι, μεταλαμβανομένας
μή non
μηδέτερος nessun dei due
μία una
νῦν ora
ὁ il
ὅλος intero
ὁμοίως similmente
ὀξύς acuto
ὅπερ ciò che
ὁπότερος qual dei due
ὀρθογώνιος ortogonale, rettangolare
ὀρθός retto
ὅταν quando
ὅτι che
ὅς il quale, che
οὐδέ né

οὐθέν niente

οὐ(κ) non

οὖν dunque

πάλιν di nuovo

πᾶς tutto

παρά ad

παρὰβάλλειν applicare παρὰβάλλειν

παράβεβλήσθω, παράβεβληται, παράβαλεῖν

παράλληλόγραμμον parallelogrammo

παράλληλος parallelo

παράπληρωμα complemento

πεπερασμένη terminata

περὶ intorno

περιέχειν comprendere

περιέχουσιν, περιέξουσιν, περιεχουσῶν, περιεχομένη,

περιεχομένην

πλευρά lato

πλὴν eccetto

πολύς molto

ποιεῖν fare

ποιεῖ, ποιοῦσιν, ποιῇ, ποιῶσιν, ποιεῖτω, ποιεῖτωσαν, ποιῆσαι,

ποιήσῃ, πεποίηκεν

πρός verso

προσεκβάλλειν prolungare

προσεβελήσθω, προσεβελήσθωσαν,
 προσεβληθείσες, προσεβληθεισῶν
 προσκειῖσθαι essere aggiunto
 προσκείσθω
 προστιθέναι aggiungere
 προστεθῇ
 σημεῖον punto
 σταθεῖσα eretta
 συμπίπτειν concorrere
 συμπίπτουσιν, συμπίπτουσαι, συμπεσοῦνται, συμπιπτέτωσαν
 συνιστάναι costruire
 συνεστάτω, συνέσταται, συνεστάτωσαν, συνίστανται,
 συστήσασθαι, συσταθῶσιν, συσταθῇσονται, συσταθεῖσαι
 συνεχές continuo
 σχῆμα figura
 τέμνειν dividere
 τέμνει, τέμνουσιν, τέμνωσιν, τετμήσθω, τετμηται, τεμεῖν,
 τετμημένες
 τέσσαρες quattro
 τετράγωνον quadrato
 τιθέναι porre
 θέσθαι, τιθεμένου
 τίς alcuno
 τραπέζιον trapezio

τρεῖς tre

τρίγωνον triangolo

τυχόν a caso

ὑπερέχειν superare

ὑπό da

ὑποκειῖσθαι supporre

ὑπόκειται

ὑποτείνειν sottendere

ὑποτείνει, ὑποτείνουνσιν, ὑποτείνουσα, ὑποτείνουσης,

ὑποτείνουσιν, ὑποτείνουσαι

χωρίον spazio

ὥς come

ὥστε sicché